

**ZESZYTY NAUKOWE  
POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ**

Nr 444

**ELEKTRONIKA**

**ZESZYT LXVII**



**GDAŃSK 1989**

---

**PRZEWODNICZĄCY KOMITETU REDAKCYJNEGO  
WYDAWNICTW POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ**  
*Roman Kazimierczak*

**REDAKTOR ZESZYTÓW NAUKOWYCH**  
*Franciszek Otto*

**REDAKTOR DZIAŁU**  
*Krzysztof Grabowski*

Wydano za zgodą  
Rektora Politechniki Gdańskiej

Wydawnictwa naukowe Politechniki Gdańskiej można nabywać  
w Ośrodku Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN  
Warszawa, Pałac Kultury i Nauki oraz w  
PP „Dom Książki” nr 23, Gmach Główny Politechniki Gdańskiej  
ul. Majakowskiego 11/12, 80-952 Gdańsk

PRINTED IN POLAND

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

---

Wydanie I. Nakład 210+25+10+30 egz. Ark. wyd. 6,5. Ark. druku 5,5. Papier offsetowy kl. III 71 g. Przyjęto do druku 7.08.1989 r. Podpisano do druku 11.08.1989 r. Druk ukończono we wrześniu 1989 r. Zamówienie nr S/273/89.UG-445/5/89. Cena zł 260,-

---

Druk wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Poznańskiej  
61-821 Poznań, ul. Ogrodowa 11, telefon 525-425

---

## SPIS TREŚCI

	Str.
1. WPROWADZENIE .....	3
1.1. Filtracja rozplotowa i odwrotna – pojęcia podstawowe .....	3
1.2. Podstawowe trudności rozwiązywania zagadnień filtracji rozplotowej i odwrotnej .....	6
1.3. Przegląd zastosowań i rozwiązań filtracji rozplotowej i odwrotnej .....	7
1.4. Cele pracy .....	11
2. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA IDEALNEJ FILTRACJI ROZPLOTOWEJ .....	13
2.1. Terminologia i podstawowe definicje .....	13
2.2. Warunki istnienia i jednoznaczność rozwiązania problemu idealnej filtracji rozplotowej .....	16
2.3. Przybliżone rozwiązanie problemu filtracji rozplotowej przez obcięcie nieskończonego szeregu .....	18
3. FILTRACJA ROZPLOTOWA W UJĘCIU APROKSYMACYJNYM .....	21
3.1. Sformułowanie problemu filtracji rozplotowej na gruncie teorii aproksymacji .....	21
3.2. Rozwiązanie problemu filtracji rozplotowej w przestrzeni $L_1$ ..	23
3.3. Rozwiązanie problemu filtracji rozplotowej w przestrzeni $L_2$ ..	26
3.4. Porównanie rozwiązań problemu filtracji rozplotowej w przestrzeniach $L_1$ i $L_2$ .....	28
4. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA FILTRACJI ROZPLOTOWEJ W SENSIE MINIMAKSOWEJ NORMY CZEBYSZEWA .....	30
4.1. Sformułowanie problemu filtracji rozplotowej w przestrzeni $L_\infty$ ..	30
4.2. Linearyzacja problemu minimaksowego .....	32
4.3. Metoda de La Vallée Poussina .....	34

---

5. NIEITERACYJNY ALGORYTM ROZWIĄZYWANIA MINIMAKSOWEGO ZAGADNIENIA FILTRACJI ROZPLOTOWEJ .....	38
5.1. Algorytm D i filtr D.....	38
5.2. Kryterium $\langle K \rangle$ wyboru zbioru funkcji realizującego rozwiązanie minimaksowe .....	41
5.3. Rozwiązanie problemu filtracji rozplotowej przy użyciu algorytmu D .....	43
5.3.1. Sygnał dwuelementowy.....	43
5.3.2. Trójelementowy sygnał parzysty.....	47
5.3.3. Pięcioelementowy sygnał parzysty.....	49
5.3.4. Siedmioelementowy sygnał parzysty.....	51
5.4. Porównanie wyników rozwiązania problemu filtracji rozplotowej wybranymi metodami .....	54
6. ZAKOŃCZENIE .....	56
6.1. Określenie kierunków dalszych badań .....	56
6.2. Dyskusja złego postawienia problemu i złego uwarunkowania numerycznego równań filtracji rozplotowej .....	58
6.3. Podsumowanie .....	61
DODATEK A	
Znormalizowany zysk filtracji względem filtru dopasowanego .....	63
BIBLIOGRAFIA .....	66
Streszczenie w języku angielskim.....	85
Streszczenie w języku rosyjskim.....	85
Podziękowania .....	86

---

Andrzej Dyka

Instytut Telekomunikacji

## LINIOWA FILTRACJA ROZPLOTOWA WZGLĘDEM SYGNAŁÓW O SKOŃCZONYM CZASIE TRWANIA

Celem pracy jest przegląd i analiza liniowych metod filtracji rozplotowej względem sygnałów o skończonym czasie trwania, przeprowadzona w dziedzinie czasu. Rozważono warunki i jednoznaczność istnienia rozwiązania problemu idealnej filtracji rozplotowej, jak również przeanalizowano rozwiązanie przybliżone otrzymane przez obcięcie nieskończonego szeregu. Następnie sformułowano problem filtracji rozplotowej na gruncie teorii aproksymacji. Istotą ujęcia aproksymacyjnego jest minimalizacja normy błędu aproksymacji. Rozważono trzy następujące przypadki tej normy:

- norma w przestrzeni  $L_1$ , której minimalizacja prowadzi do analitycznego rozwiązania w postaci<sup>1</sup> filtru ZFF, tj. filtru wymuszającego zera w sygnale wyjściowym (ang. Zero-Forcing-Filter),
- norma w przestrzeni  $L_2$ , której minimalizacja prowadzi do analitycznego rozwiązania metodą<sup>2</sup> najmniejszych kwadratów,
- norma w przestrzeni  $L_\infty$ , której minimalizacja prowadzi do minimaxowego zagadnienia Czebyszewa, rozwiązywanego w ogólności metodami iteracyjnymi.

Szczególną uwagę poświęcono normie w przestrzeni  $L_\infty$ . Przedyskutowano rozwiązanie problemu filtracji rozplotowej przy użyciu metody de La Vallée Poussina, prowadzącej do algorytmu iteracyjnego. Udowodniono, że dla pewnej klasy sygnałów parzystych istnieje nieiteracyjny algorytm D, pozwalający wyznaczyć w sposób analityczny minimaxowe rozwiązanie tego problemu. Stwierdzono również, że dla szerszej klasy sygnałów algorytm ten pozwala wyznaczyć rozwiązanie analityczne, bliskie minimaxowemu. Daje to podstawę do szybkiego uzyskania rozwiązania minimaxowego metodą iteracyjną, często w pierwszej iteracji. Ponadto wyznaczono wyjściowy stosunek sygnału do szumu i przedyskutowano jego związek z wielkością błędu aproksymacji, a także przeanalizowano zagadnienie złego postawienia problemu filtracji rozplotowej oraz złego uwarunkowania numerycznego równań pozwalających wyznaczyć jego rozwiązanie.

Wykaz ważniejszych oznaczeń

- $\delta(n)$  - delta Kroneckera,  
 $\delta(t)$  - delta Diraca,  
 $\epsilon_1$  - wartość minimum błędu aproksymacji w przestrzeni  $L_1$ ,  
 $\epsilon_2$  - wartość minimum błędu aproksymacji w przestrzeni  $L_2$ ,  
 $\epsilon_\infty$  - wartość minimum błędu aproksymacji w przestrzeni  $L_\infty$ ,  
 $\epsilon_D$  - wartość błędu aproksymacji przy użyciu algorytmu D,  
 $\{\epsilon(n)\}$  - błąd aproksymacji w postaci ciągu,  
 $\mathcal{F}[\cdot]$  - symbol przekształcenia Fouriera,  
 $\mathcal{F}^{-1}[\cdot]$  - symbol odwrotnego przekształcenia Fouriera,  
 $\{g(n)\}$  - odpowiedź filtru rozplotowego w postaci ciągu na pobudzenie sygnałem wejściowym identyfikowanego systemu,  
 $g$  - odpowiedź filtru rozplotowego w postaci wektora wierszowego na pobudzenie sygnałem wejściowym identyfikowanego systemu,  
 $\{g_D^{(K)}(n)\}$  - sygnał wyjściowy filtru D rzędu K w postaci ciągu,  
 $\{h(n)\}$  - odpowiedź impulsowa filtru rozplotowego w postaci ciągu,  
 $\{\hat{h}(n)\}$  - odpowiedź impulsowa idealnego filtru rozplotowego w postaci ciągu,  
 $h$  - odpowiedź impulsowa filtru rozplotowego w postaci wektora wierszowego,  
 $\{h_D^{(K)}(n)\}$  - odpowiedź impulsowa filtru D rzędu K w postaci ciągu,  
 $H_m$  - zbiór wszystkich funkcji dyskretnych, których argument jest określony w m-elementowym zbiorze liczb całkowitych,  
 $k(t)$  - odpowiedź impulsowa identyfikowanego systemu,  
 $R_{ss}$  - macierz autokorelacji sygnału s,  
 $s(t)$  - sygnał wejściowy identyfikowanego systemu,  
 $\{s(n)\}$  - sygnał wejściowy identyfikowanego systemu w postaci ciągu,  
 $s$  - sygnał wejściowy identyfikowanego systemu w postaci wektora wierszowego,  
 $S_T$  - reprezentacja sygnału wejściowego identyfikowanego systemu w postaci macierzy splotowej Toeplitza,  
 $(S/N)_0$  - znormalizowany wyjściowy stosunek sygnału do szumu,  
 $y(t)$  - sygnał wyjściowy identyfikowanego systemu,  
 $\|\cdot\|_p$  - symbol normy w przestrzeni  $L_p$ ,  
 $*$  - symbol splotu.

## 1. WPROWADZENIE

Jednym z ważniejszych zagadnień w analizie i przetwarzaniu sygnałów, mającym istotne znaczenie w wielu dziedzinach nauki i techniki, jest filtracja rozplotowa. Obszar zastosowań filtracji rozplotowej jest niezwykle rozległy. Zawierają się w nim m.in. takie dziedziny jak geofizyka, w szczególności seismologia, echolokacja, w tym tomografia ultradźwiękowa, hydrolokacja i radiolokacja, szeroko pojmowane miernictwo, telekomunikacja, przetwarzanie obrazów itp. Z tego powodu zagadnienie to jest przedmiotem licznych badań, których odzwierciedleniem jest obszerna bibliografia. Niestety, w piśmiennictwie krajowym tylko bardzo nieliczne prace, w zasadzie wyłącznie o charakterze przyczynkowym, są poświęcone filtracji rozplotowej. Co więcej, terminologia polska dotycząca tego zagadnienia w zasadzie nie istnieje, natomiast nazewnictwo angielskie jest w wielu przypadkach niespójne. Z tego powodu, jeszcze przed określeniem merytorycznego celu tej pracy, niezbędne jest zdefiniowanie podstawowych pojęć oraz uporządkowanie terminologii. Stąd też, w pierwszym podrozdziale niniejszej pracy podjęta została próba zdefiniowania i uporządkowania podstawowych pojęć filtracji rozplotowej.

### 1.1. Filtracja rozplotowa i odwrotna - pojęcia podstawowe

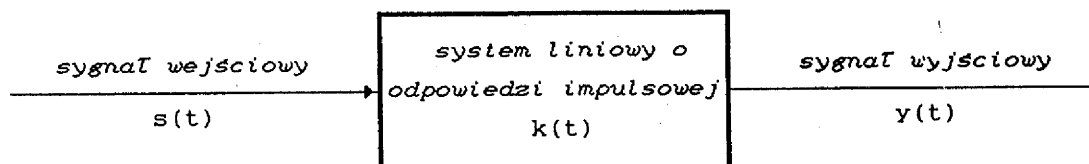
Użyte w tytule niniejszej pracy, jak i w powyższym wstępie pojęcie "filtracja rozplotowa" jest tłumaczeniem angielskiego terminu "deconvolution filtering".

Dla zdefiniowania filtracji rozplotowej rozważmy pierwotną do niej operację splotu. Dane są funkcje  $s(t)$ ,  $k(t)$  i  $y(t)$ , których argument ma najczęściej interpretację fizyczną czasu, powiązane następującą zależnością:

$$s(t) * k(t) = y(t), \quad (1.1)$$

gdzie symbol  $*$  oznacza operację splotu.

Zależność (1.1) ma oczywistą, choć nie jedyną interpretację fizyczną, a mianowicie: funkcje  $s(t)$  i  $y(t)$  są sygnałami odpowiednio na wejściu i wyjściu stacjonarnego systemu liniowego opisanego odpowiedzią impulsową  $k(t)$  (rys.1).



Rys. 1. Interpretacja fizyczna operacji splotu

Rozważmy zagadnienie operacji odwrotnej do splotu polegające na tym, że przy danym sygnale wyjściowym  $y(t)$  należy określić  $k(t)$  na podstawie znajomości  $s(t)$ . Zagadnienie alternatywne polega na wyznaczeniu  $s(t)$  na podstawie znajomości  $y(t)$  i  $k(t)$ , jednak ze względu na przemienność splotu oba te zagadnienia są matematycznie tożsame. W dalszej części niniejszej pracy będziemy więc rozważać problem wyznaczenia  $k(t)$  na podstawie znajomości  $y(t)$  i  $s(t)$ . Niezależnie też od tego, jakie wielkości fizyczne w konkretnie rozpatrywanym modelu reprezentują rozważane funkcje,  $k(t)$  będziemy nazywali umownie odpowiedzią impulsową, a  $y(t)$  i  $s(t)$  sygnałami odpowiednio wyjściowym i wejściowym identyfikowanego systemu. Tak postawione zagadnienie wyznaczenia  $k(t)$  sprowadza się do rozwiązania szczególnego przypadku liniowego równania całkowego Fredholma I rodzaju, które przy założeniu, że  $s(t)$ ,  $k(t)$  oraz  $y(t)$  są funkcjami rzeczywistymi przyjmuje następującą postać [40], [101], [116], [194], [224],

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} s(t-\tau) \cdot k(\tau) d\tau = y(t), \quad (1.2)$$

gdzie funkcja  $k(\tau)$  jest poszukiwanym rozwiązaniem występującym tu w postaci uwikłanej,  $s(t-\tau)$  jest jądrem równania Fredholma,  $\tau_1$  i  $\tau_2$  są skończonymi granicami całkowania. W ogólnym przypadku, dla ciągłej funkcji  $y(t)$  nie istnieje ciągle rozwiązanie  $k(t)$ , chyba że jądro  $s(t-\tau)$  posiada pewne osobliwości, lub gdy przedział całkowania jest nieograniczony [40], [116]. W rzeczywistych zastosowaniach zarówno przedział całkowania jak i wszystkie trzy funkcje występujące w równaniu (1.2) są ograniczone w czasie. Z tego powodu, w praktycznych zastosowaniach można wyznaczyć co najwyżej przybliżone rozwiązanie zagadnienia odwrotnego do operacji splotu.

Poszukując przybliżonego rozwiązania równania Fredholma (1.2), zagadnienie odwrotne do operacji splotu można sformułować w kategoriach filtracji liniowej sygnału  $y(t)$ . Podejście takie, przyjęte w niniejszej pracy, pozwala skorzystać z dobrze ugruntowanego i spójnego formalizmu teorii sygnałów i systemów liniowych. W tym kontekście rozwiązanie równania (1.2) można interpretować jako wyznaczenie odpowiedzi impulsowej  $h(t)$  takiego systemu liniowego, którego odpowiedzią na pobudzenie sygnałem  $y(t)$  jest  $k(t)$  (rys. 2). Można wykazać, że poszukiwana odpowiedź impulsowa  $h(t)$  musi spełniać następujący warunek,

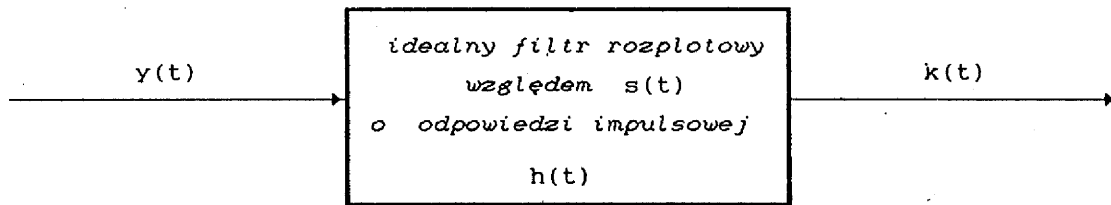
$$s(t) * h(t) = \delta(t), \quad (1.3)$$

gdzie  $\delta(t)$  jest dystrybucją Diraca, np. [225].

System liniowy opisany odpowiedzią impulsową  $h(t)$  nosi nazwę idealnego filtru rozplotowego względem  $s(t)$ .

Należy nadmienić, iż niektórzy autorzy uważają, że odpowiedź impulsowa filtru rozplotowego nie jest definiowalna w dziedzinie czasu, np. [203]. Z poglądem tym nie można się zgodzić, chociaż należy zwrócić uwagę, że analogicznie jak w przypadku rozwiązania równania Fredholma (1.2), odpowiedź impulsowa idealnego filtru rozplotowego, zdefiniowana przez zależność (1.3), jest dana w postaci uwikłanej.





Rys. 2. Interpretacja fizyczna idealnego filtra rozplotowego względem  $s(t)$

Stosując przekształcenie Fouriera do obydwu stron zależności (1.3) otrzymujemy następujące wyrażenie na transmitancję  $H(j\omega)$  idealnego filtra rozplotowego,

$$H(j\omega) = \frac{1}{S(j\omega)} \quad (1.4)$$

gdzie:  $H(j\omega)$  i  $S(j\omega)$  są odpowiednio transformatami Fouriera  $h(t)$  i  $s(t)$ ,  $\omega$  jest pulsacją,  $j = \sqrt{-1}$ .

Zarówno definicję (1.3), jak i (1.4) można traktować jako szczególne przypadki znacznie szerzej rozumianego zagadnienia odwrotnego (ang. inverse problem), np. [34], [39], [59], [92], [107], [130], [150], [164], [183], [187], [193], [205], [215], [216], [227], [236], [242], [243], [244], [249], [263], [268]. Z tego powodu, jak również ze względu na charakterystyczną postać  $H(j\omega)$ , idealny filtr rozplotowy dany definicją (1.3) jest przez wielu autorów nazywany także filtrem odwrotnym, (ang. inverse filter) np. [203], [225]. Równoważność definicji (1.3) i (1.4) ma jednak znaczenie teoretyczne, i to tylko w odniesieniu do klasy układów liniowych. Wynika to z faktu, że niektóre metody praktycznej realizacji tych filtrów, szczególnie w dziedzinie czasu, mają charakter nieliniowy bądź adaptacyjny, co powoduje, że nie można przyporządkować im sensownej interpretacji w dziedzinie częstotliwości. Co więcej, w przypadku rozwiązań przybliżonych nawet układy liniowe optymalizowane pod kątem założonego kryterium w dziedzinie czasu nie muszą stanowić zadowalającego rozwiązania w dziedzinie częstotliwości, i odwrotnie. Stąd też jest zasadne, aby w praktyce rozróżniać realizacje czasową i częstotliwościową, chociaż niefortunny dualizm powszechnie używanego nazewnictwa może być tu źródłem nieporozumień. Celem ich uniknięcia, w niniejszej pracy przybliżone realizacje filtrów idealnych danych definicjami (1.3) i (1.4) nazywa się odpowiednio filtrem rozplotowym i filtrem odwrotnym. Jak już wspomniano, filtry idealne określone obu definicjami nie są fizycznie realizowalne, a w praktyce stosuje się metody i algorytmy przybliżone, z kryterium błędu zdefiniowanym w dziedzinie czasu lub częstotliwości. Konsekwentnie więc, autor pracy proponuje aby przyjąć, że w przypadku filtra rozplotowego kryterium błędu przybliżenia zdefiniowane jest w dziedzinie czasu, natomiast w przypadku filtra odwrotnego - w dziedzinie częstotliwości.

Celem tego rozdziału było zdefiniowanie podstawowych pojęć oraz próba uporządkowania terminologii związanej z filtracją rozplotową. W szczególności, intencją autora było zdefiniowanie, umożliwiające jednoznaczne rozróżnienie, dwóch bliskoznacznych pojęć: "filtracja rozplotowa" i "filtracja odwrotna". W następnym rozdziale omówione zostaną podstawowe problemy natury matematycznej związane z praktyczną realizacją obu rodzajów filtracji.

## 1.2. Podstawowe trudności rozwiązywania zagadnień filtracji rozplotowej i odwrotnej

W klasie stacjonarnych systemów liniowych splot jest uogólnieniem wszystkich operacji liniowych dokonywanych na sygnale. Z tego powodu wszelkie zniekształcenia liniowe sygnału modeluje się zazwyczaj przy użyciu splotu. Zniekształcony sygnał wyjściowy systemu liniowego jest wówczas splotem sygnału niezniekształconego z odpowiedzią impulsową reprezentującą zniekształcenia. Naturalnym sposobem odzyskania niezniekształconego sygnału jest, w klasie stacjonarnych systemów liniowych, filtracja rozplotowa bądź odwrotna. Z tego powodu filtracja obu rodzajów używana jest w licznych obszarach zastosowań analizy i przetwarzania sygnałów.

Ze względu na pozorną prostotę definicji filtracji rozplotowej i odwrotnej można by przypuszczać, że ich praktyczna realizacja nie powinna przedstawiać większych problemów. Tak jednak nie jest, okazuje się bowiem, że filtracja obu rodzajów jest w praktyce zagadnieniem nietrywialnym. Wynika to z następujących powodów:

1. Problem idealnej filtracji rozplotowej danej definicją (1.3) należy w ogólnym przypadku do tzw. zagadnień źle postawionych (ang. ill-posed problem). Wynika to z fizycznej nierealizowalności warunku, aby odpowiedzią filtru rozplotowego na pobudzenie sygnałem, względem którego dokonuje się rozplotania, była dystrybucja Diraca  $\delta(t)$ . W konsekwencji, jak już wspomniano w rozdziale 1.1, dokładne rozwiązanie zagadnienia filtracji rozplotowej, dane funkcją ograniczoną w czasie, nie istnieje, można natomiast otrzymać rozwiązania przybliżone.
2. Konsekwencją złego postawienia problemu idealnej filtracji rozplotowej jest złe uwarunkowanie numeryczne (ang. ill-conditioned problem) równań pozwalających wyznaczyć rozwiązanie tego problemu, np. [4], [13], [88]. W ogólności, złe uwarunkowanie numeryczne zagadnienia objawia się w postaci bardzo dużego "wzmocnienia" błędu względnego danych wejściowych. I tak np. w przypadku operacji odwracania macierzy, wielkość tego "wzmocnienia" jest określona tzw. wskaźnikiem uwarunkowania Turinga (ang. condition number), np. [58], [262]. W wielu praktycznych zastosowaniach filtracji rozplotowej, dane wejściowe są zakłócone szumami lub obciążone błędem, nierzadko dość znacznym, który na skutek złego uwarunkowania ulega dużemu wzmoc-

nieniu. Praktyczną konsekwencją złego uwarunkowania równań idealnej filtracji rozplotowej i odwrotnej jest niekorzystne zjawisko pogarszania wyjściowego stosunku sygnału do szumu, np. [13], [225].

Jak już wspomniano, filtracje rozplotowa i odwrotna są szczególnymi przypadkami tzw. zagadnień odwrotnych. Sformułowanie tych zagadnień jest konsekwencją metody badawczej, której istota polega na identyfikacji przyczyn badanego zjawiska na podstawie wyników uzyskanych w trakcie jego obserwacji. Wyniki te interpretuje się jako skutek poszukiwanej przyczyny, który w większości badań określony jest ze skończoną dokładnością, a nierzadko tylko w sposób przybliżony. Zagadnienia odwrotne są zazwyczaj zagadnieniami źle postawionymi, często nie posiadającymi dokładnego rozwiązania. Definicję matematyczną dobrego postawienia zagadnienia, (ang. well-posed problem), którego kontradykcją jest złe postawienie, przypisuje się Hadamardowi, np. [4], [13], [244]. W myśl tej definicji zagadnienie odwrotne jest dobrze postawione, jeżeli odwzorowanie reprezentującego go operatora na operator odwrotny jest jednoznaczne, tzn. jeden do jednego, oraz jeżeli operator odwrotny jest ograniczony. Za główny powód złego postawienia zagadnienia, a w konsekwencji złego uwarunkowania numerycznego równań pozwalających wyznaczyć jego rozwiązanie, uważa się zazwyczaj nieograniczoność operatora odwrotnego. Znana metoda rozwiązywania źle postawionych zagadnień polega na zastąpieniu nieograniczonego operatora odwrotnego innym, spełniającym określone warunki, operatorem ograniczonym, zwanym regularizatorem. Za twórcę tej metody rozwiązywania źle postawionych zagadnień uważa się Tichonowa, np. [4], [13], [203], [242], [243], [244].

Przedstawione powyżej trudności powodują, że nie istnieje spójna teoria, która wyczerpująco ujmowałaby zagadnienia filtracji rozplotowej i odwrotnej. Istnieje natomiast znaczna liczba metod i algorytmów tych filtracji, optymalizowanych pod kątem określonych zastosowań. Przedstawiona w następnym rozdziale próba klasyfikacji zastosowań i metod filtracji rozplotowej i odwrotnej na pewno nie wyczerpuje tego zagadnienia, aczkolwiek autor wyraża nadzieję, iż może być ona w jakiejś mierze reprezentatywna.

### 1.3. Przegląd zastosowań i rozwiązań filtracji rozplotowej i odwrotnej

Nawiązując do równania Fredholma (1.2), wyidealizowane zagadnienie filtracji rozplotowej można sformułować jako wyznaczenie przybliżenia niezna-nej odpowiedzi impulsowej  $k(t)$  na podstawie znajomości sygnałów  $s(t)$  i  $y(t)$ . Idealizacja tak postawionego problemu, oprócz wspomnianego już problemu nierealizowalności definicji (1.3), polega na założeniu, iż  $s(t)$  i  $y(t)$  są sygnałami deterministycznymi. Pod pojęciem sygnału deterministycznego rozumiemy tutaj sygnał dany z absolutną dokładnością, np. przepisem analitycznym.

W zastosowaniach praktycznych sygnały  $s(t)$  i  $y(t)$  są określone ze skończoną dokładnością. W zagadnieniach modelowania, w których zakłada się parametryczny model sygnału, można go określić z taką dokładnością, z jaką dają się wyznaczyć jego parametry. W opisie nieparametrycznym sygnału, dokładność jego określenia wynika z wielkości błędów pomiaru oraz poziomu szumów. Zakres niniejszej pracy w dużym stopniu obejmuje te zastosowania, w których używa się nieparametrycznych modeli sygnałów. Stąd, dla uproszczenia rozważań, w dalszej części pracy przypadkowe błędy pomiaru (z pominięciem błędów systematycznych) będziemy traktowali jako jeden z elementów składowych szumu, zaś wypadkowa nieokreśloność sygnału interpretowana będzie jako wynik zakłócenia sygnału deterministycznego białym szumem gaussowskim.

Logiczną konsekwencją powyższych definicji jest założenie, iż w ramach niniejszej pracy pojęcie "znajomość sygnału" oznacza, że jest on określony z dokładnością wynikającą z poziomu szumu, chyba że będzie to zastrzeżone inaczej. W tym kontekście, w obszarze zastosowań filtracji rozplotowej i odwrotnej można wyróżnić trzy następujące przypadki:

1. Znane są  $y(t)$ ,  $s(t)$ , i  $k(t)$ .
2. Znane są  $y(t)$  i  $s(t)$ .
3. Znany jest  $y(t)$ .

Ad 1. Jest to specyficzny przypadek, w którym  $y(t)$  jest znany, zaś sygnał wejściowy  $s(t)$  jest najczęściej określony z tak dużą dokładnością, że można go uznać za deterministyczny. Odpowiedź impulsowa  $k(t)$ , dana w postaci parametrycznej, jest określona z dokładnością z jaką można wyznaczyć jej parametry. Wykorzystuje się tutaj formalizm filtracji rozplotowej celem zaprojektowania sygnału  $s(t)$  w taki sposób, aby można było jak najdokładniej pomierzyć parametry  $k(t)$ . Podejście to znajduje zastosowanie w systemach pomiaru parametrów złożonych układów elektronicznych, np. [143], [144], [174], [175], [272].

Ad 2. W praktyce sytuacja taka występuje najczęściej, przy czym dają się tu wyróżnić dwa następujące przypadki:

- a. - sygnał  $s(t)$  jest deterministyczny,  $y(t)$  - znany.
- b. - sygnały  $s(t)$  i  $y(t)$  są znane.

a) Jest to m.in. sytuacja charakterystyczna dla radiolokacji i hydrolokacji, gdzie formalizm filtracji rozplotowej używany jest do redukcji poziomu listków bocznych w sygnale po kompresji impulsu, np. [44], [60], [69], [70], [71], [78], [237], jak również do poprawy rozdzielczości systemów radio- i hydrolokacyjnych, np. [16], [33], [64], [65], [66], [67], [68], [74], [75], [76], [77], [78], [79], [80], [81], [82], [83], [86], [93], [95], [96], [97], [99], [100], [206], [269]. Kolejnym przykładem jest tomografia ultradźwiękowa, w której poprzez odpowiednie uformowanie sygnału sondującego w taki sposób, aby odpowiedź akustyczna przetwornika była jak najkrótszym impulsem, uzyskuje się poprawę rozdzielczości wgłębnej, np.

[90], [137], [138]. W tej dziedzinie stosuje się również różnorodne algorytmy i techniki filtracji rozplotowej i odwrotnej, których celem jest poprawa rozdzielczości, a co za tym idzie jakości zobrazowania, np. [6], [23], [47], [51], [52], [55], [91], [117], [118], [121], [128], [139], [149], [202], [208], [222], [234], [258], [265]. Formalizm filtracji rozplotowej i odwrotnej jest używany również w projektowaniu anten o określonych charakterystykach kierunkowych, np. [94], bądź pomiaru ich odpowiedzi impulsowej, np. [58], [207], [218], [220], [247].

b) Główną dziedziną nauki i techniki, której dotyczy ten przypadek, jest geofizyka, w szczególności sejsmologia. Wynika to z faktu, że postać pobudzenia  $s(t)$  zarówno naturalnego (wstrząs sejsmiczny), jak i sztucznego (zazwyczaj wybuch) jest znana tylko z pewnym przybliżeniem. Co więcej, postać tego pobudzenia, ze względu na zjawiska propagacyjne w warstwach gruntu, ulega znacznej modyfikacji, np. [209], [274]. Z powyższych przyczyn, dla określenia postaci pobudzenia stosuje się metody predykcji i estymacji liniowej, zaś algorytmy filtracji rozplotowej i odwrotnej mają charakter adaptacyjny, przybierając często formę filtru Kalmana, np. [3], [5], [7], [11], [20], [25], [31], [41], [49], [50], [53], [89], [105], [107], [108], [130], [131], [140], [146], [147], [154], [155], [157], [158], [159], [165], [166], [167], [168], [190], [195], [205], [209], [211], [230], [249], [254], [255], [256], [257], [261], [264], [273], [274].

Zagadnienia predykcji i estymacji liniowej w zastosowaniu do filtracji rozplotowej i odwrotnej są również charakterystyczne dla analizy i syntezy mowy, np. [27], [29], [31], [46], [102], [127], [142], [156], [161], [170], [173], [231], z którą to dziedziną ściśle są związane zagadnienia modelowania procesów z użyciem modeli parametrycznych AR, MA i ARMA np. [103], [106], [129], [156]. W tych zagadnieniach pojęcie "znany sygnał" oznacza zazwyczaj, że określony jest on z dokładnością, z jaką można wyznaczyć jego parametry. Kolejną gałęzią techniki, w której niniejszy przypadek filtracji rozplotowej i odwrotnej ma zastosowanie, jest adaptacyjna korekcja odpowiedzi impulsowej kanału transmisyjnego danych cyfrowych (najczęściej kanału telefonicznego), celem zmniejszenia tzw. interferencji międzysymbolowych, (ang. intersymbol interferences) i zwiększenia w ten sposób potencjalnej szybkości transmisji, np. [115], [152], [160], [169], [173], [196], [197], [228]. Zagadnienia filtracji rozplotowej i odwrotnej mają także zastosowanie w szeroko pojętej dziedzinie wizualizacji i przetwarzania obrazów, w tym w przetwarzaniu komputerowym i tomografii, np. [19], [45], [104], [120], [153], [203], [233], [245], [267], astronomii, np. [57], [179], [180], mikroskopii optycznej, np. [14], [114], holografii, np. [184], fotografii, np. [152], zobrazowaniu akustycznym, np. [28].

Filtracja rozplotowa i odwrotna ma również zastosowanie w naukach przyrodniczych, fizyce oraz szeroko pojętym miernictwie. I tak należałoby wymienić następujące zastosowania: medycyna i biologia, np. [8], [36], [37], [57], [122], [150], [213], [217], [271], pomiary akustyczne, np. [18].

[39], [109], w tym w akustyce wnętrza, np. [171], [178] i w propagacji hydroakustycznej, np. [56], [87], teoria pola akustycznego, np. [35], [59], [112], [263], i elektromagnetycznego, np. [34], [98], [164], [210], [226], hydrodynamika, np. [1], geologia (pomiar promieniowania naturalnego), np. [111], technika jądrowa, np. [232], radiometria mikrofalowa, np. [22], [119], spektroskopia, np. [125], pomiary prędkości, np. [32], [113], pomiary nieinwazyjne, np. [227].

Ad 3. Jest to przypadek, w którym sygnał  $s(t)$ , względem którego dokonuje się rozplatania, jest w zasadzie nieznan. Z tego powodu przypadek ten nazywany jest rozplataniem ślepy (ang. blind deconvolution). W takiej sytuacji przyjmuje się realistyczne założenia dotyczące hipotetycznej postaci widma sygnału, dokonując względem niego filtracji odwrotnej, często przy użyciu metody cepstralnej, np. [172], [223]. Przypadek ten ma m.in. zastosowanie w renowacji starych nagrań gramofonowych i przetwarzaniu obrazów, np. [21], [45], [185].

Wspólnym problemem dla wszystkich omawianych przypadków filtracji rozplotowej i odwrotnej jest złe uwarunkowanie numeryczne opisujących je równań. Zagadnieniu złego uwarunkowania poświęcona jest nader obszerna specjalistyczna literatura, np. [43], [242], [243], [244], [262]. Jest ono również dyskutowane w wielu publikacjach poświęconych filtracji rozplotowej i odwrotnej oraz zagadnieniom identyfikacji systemów liniowych, np. [4], [12], [13], [22], [38], [51], [88], [117], [123], [133], [182], [183].

Na zakończenie należy również wspomnieć o pracach natury teoretycznej, mających raczej charakter studialny, niż poświęconych konkretnemu zastosowaniu, bądź też mających wiele zastosowań, np. [10], [17], [48], [110], [126], [162], [172], [176], [177], [181], [186], [187], [191], [192], [193], [198], [199], [200], [201], [204], [214], [215], [216], [223], [229], [238], [239], [240], [246], [249], [259], [268], [270], w tym prace analizujące zagadnienia filtracji rozplotowej i odwrotnej na gruncie teorii aproksymacji, np. [2], [60], [61], [62], [63], [69], [70], [71], [72], [73], [84], [85], [86], [124], [219], [236], [250], [252], [253], [266], wykorzystujące teorię zbiorów rozmytych, np. [30], transformację Walsha, np. [42], metody sterowania optymalnego, np. [31], metody iteracyjne i adaptacyjne, np. [132], [141], [162], [188], [189], [200], [219], [260] oraz stochastyczne, np. [134], [135], [136], jak również prace przeglądowe, np. [15], [168], [174], [203], [209], [249].

Podsumowując niniejszy przegląd trzeba stwierdzić, że ze względu na wykorzystanie idei filtracji rozplotowej i odwrotnej w licznych gałęziach nauki i techniki, jednoznaczna klasyfikacja zarówno metod, jak i zastosowań napotyka na znaczne trudności, pogłębione dodatkowo niespójnością używanej terminologii. Wynika to po części z faktu, że pewne rozwiązania tych filtracji posiadają ugruntowaną tradycją nazwy, specyficzne dla dziedzin naukowych, którymi zajmowali się ich twórcy. I tak np. optymalny, liniowy filtr rozplotowy z normą błędów aproksymacji zdefiniowaną w przestrzeni  $L_1$  nosi

tradycyjną nazwę ZFF (ang. Zero-Forcing-Filter), związaną z adaptacyjną korekcją charakterystyki kanałów transmisji danych cyfrowych, np. [152], [169], [197], [228]. Dodatkowo pewne kłopoty sprawia przyjęte powyżej kryterium klasyfikacji oparte na znajomości sygnału, względem którego dokonuje się operacji rozplatania. W wielu praktycznych przypadkach sprawą dyskusyjną może być ustalenie czy rozpatrywany sygnał określony jest z dokładnością pozwalającą na przybliżenie go modelem deterministycznym. Dla potrzeb niniejszej klasyfikacji przyjęto, że modelem deterministycznym można posłużyć się w tych przypadkach, w których istnieje możliwość wielokrotnego i powtarzalnego pomiaru tego sygnału, bądź innej wielkości fizycznej, którą w rozpatrywanym modelu on reprezentuje, np. odpowiedzi impulsowej czy też rozkładu pobudzeń na aperturze anteny.

Kolejny rozdział pracy poświęcony jest sformułowaniu jej zasadniczych celów oraz określeniu zakresu ich realizacji.

#### 1.4. Cele pracy

Celem ogólnym niniejszej pracy jest przegląd i analiza liniowych metod filtracji rozplotowej względem sygnałów ograniczonych w czasie, przeprowadzona w dziedzinie czasu na gruncie teorii aproksymacji.

Sformułowanie tego celu wymagało zdefiniowania podstawowych pojęć oraz uporządkowania terminologii, co zostało przeprowadzone w rozdziale 1.1 i częściowo w 1.3. Zgodnie z przyjętą tam definicją filtracji rozplotowej, sformułowanie celu pracy oznacza, że błąd aproksymacji zdefiniowany jest w dziedzinie czasu. Powody takiego sformułowania celu pracy są następujące:

1. W wielu praktycznych zastosowaniach istotną z merytorycznego punktu widzenia jest relacja: sygnał wejściowy - sygnał wyjściowy. W takiej sytuacji miara błędu aproksymacji jest w naturalny sposób zdefiniowana w dziedzinie czasu.
2. Formalizm teorii aproksymacji pozwala na przeformułowanie źle postawionego zagadnienia idealnej filtracji rozplotowej danego definicją (1.3). Autor wyszedł tutaj z założenia, że poprzez skonstruowanie nowej, realistycznej definicji filtracji rozplotowej, uwzględniającej nieunikniony błąd aproksymacji, uzyska efekt mający charakter regularyzacji źle postawionego zagadnienia wyidealizowanego. Konsekwencją regularyzacji jest polepszenie uwarunkowania wynikowego zagadnienia numerycznego, którego rozwiązanie jest poszukiwanym przybliżeniem rozwiązania problemu filtracji rozplotowej.

Sformułowany powyżej cel ogólny niniejszej pracy obejmuje te zastosowania, w których sygnał  $s(t)$  jest deterministyczny, zaś  $y(t)$  - znany. W klasyfikacji metod filtracji rozplotowej przeprowadzonej w rozdziale 1.3, założenie to odpowiada obszarowi zastosowań diskutowanemu w punkcie 2a.

Rozdział 2 rozpoczyna się krótkim wprowadzeniem w terminologię, notację oraz pojęcia podstawowe w zakresie aparatu matematycznego wykorzystywanego w pracy. Następnie przedstawiono rozwiązanie analityczne zagadnienia idealnej filtracji rozplotowej oraz przedyskutowano warunki jego istnienia [252], [253]. Dalej przedstawiono zaproponowany przez autora algorytm wyznaczania przybliżonego rozwiązania, polegający na obcięciu nieskończonego szeregu [72], [73], a także przedyskutowano wielkość błędu obcięcia [252].

W rozdziale 3 pracy sformułowano zagadnienie filtracji rozplotowej na gruncie teorii aproksymacji. Istotą ujęcia aproksymacyjnego jest w tym przypadku minimalizacja błędu aproksymacji zdefiniowanego przy użyciu rodziny norm w przestrzeniach  $L_p$ . Przeanalizowano kolejno rozwiązanie zagadnienia filtracji rozplotowej dla  $p=1$  oraz  $p=2$ . Stwierdzono, że dla  $p=1$  minimalizacja normy błędu aproksymacji dla zagadnienia filtracji rozplotowej prowadzi do znanego rozwiązania o postaci filtru ZFF, np. [152], [169], [197], [228]. Minimalizacja normy dla  $p=2$  prowadzi do rozwiązania metodą najmniejszych kwadratów, np. [115], [209], [274]. Na zakończenie rozdziału 3 dokonano porównania rozwiązań zagadnienia filtracji rozplotowej w przestrzeniach  $L_1$  i  $L_2$ .

W rozdziale 4 rozważono zagadnienie rozwiązania filtracji rozplotowej z minimalizacją normy błędu w przestrzeni  $L_\infty$ . Jest ona równoważna normie maksymalnej, a jej minimalizacja prowadzi do minimaxowego problemu Czebyszewa. Na wstępie rozdziału sformułowano więc minimaxowe zagadnienie filtracji rozplotowej, posiadające charakter nieliniowy. Następnie przedstawiono metodę linearyzacji zmiennych umożliwiającą przekształcenie tego zagadnienia w równoważny problem liniowy [62], [250]. Dalej przedstawiono metodę de La Vallée Poussina w zastosowaniu do rozwiązania rozważanego zagadnienia filtracji rozplotowej. Stwierdzono, że metoda ta, podobnie jak inne, prowadzi do algorytmów iteracyjnych [24], [62], [251].

Konieczność użycia algorytmów iteracyjnych poważnie utrudnia projektowanie optymalnego filtru rozplotowego z minimaxową normą Czebyszewa. Trudności te uzasadniają sformułowany poniżej cel szczególnej pracy. Celem szczególnym niniejszej pracy jest propozycja i analiza nowej metody rozwiązywania minimaxowego problemu filtracji rozplotowej. Realizując ten cel, w rozdziale 5 udowodniono, że dla pewnego zbioru parzystych sygnałów  $s(t)$  istnieje analityczne rozwiązanie minimaxowego problemu filtracji rozplotowej, opisane nieiteracyjnym algorytmem D, zaproponowanym przez autora w [61] i dokładniej przeanalizowanym w [62] oraz [63]. W pierwszej części rozdziału 5 przedstawiono opis algorytmu D, prowadzącego do filtru D, który jest liniową kombinacją filtrów ZFF. Przedyskutowano ograniczenia na zbiór sygnałów  $s(t)$ , dla których filtr D jest rozwiązaniem minimaxowego zagadnienia filtracji rozplotowej. Następnie wykazano istnienie takich rozwiązań dla sygnału dwuelementowego [63], [84], trójelementowego [60], [63], [78], [250], pięcioelementowego i siedmioelementowego [63]. Dodatkowo dla omawianych przypadków, wyznaczono i przedyskutowano relacje wymienne (ang. trade-offs) pomiędzy wartościami błędu aproksymacji i wyjściowego stosunku sygna-



łu do szumu, przy czym ta ostatnia wielkość odniesiona została do maksimum, które osiąga się w przypadku filtru dopasowanego. Dalej stwierdzono, że dla znacznie szerszej klasy sygnałów algorytm D umożliwia otrzymanie rozwiązania bliskiego minimaksowemu. Pozwala to sformułować kryterium  $(K)$  mogące być podstawą do uzyskania dokładnego rozwiązania minimaksowego w pierwszej iteracji. Na koniec rozdziału 5, dla przykładowej populacji parzystych sygnałów  $s(t)$ , przedstawiono wyniki analizy numerycznej, umożliwiającej porównanie wielkości wyjściowego stosunku sygnału do szumu oraz wartości błędu aproksymacji. Analizę tę przeprowadzono dla rozwiązań zagadnienia filtracji rozplotowej w przestrzeniach  $L_1$  i  $L_2$  oraz metodą obcięcia szeregu nieskończonego, a także z użyciem algorytmu D.

Na zakończenie, na podstawie otrzymanych rezultatów, przedyskutowano zagadnienie złego postawienia problemu filtracji rozplotowej oraz złego uwarunkowania numerycznego równań pozwalających otrzymać jego rozwiązanie, a także określono pokrótce kierunki dalszych badań w zakresie przedmiotu niniejszej pracy.

## 2. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA IDEALNEJ FILTRACJI ROZPLOTOWEJ

W rozdziale przedstawiono analityczne rozwiązanie zagadnienia idealnej filtracji rozplotowej. Rozpoczyna się on wprowadzeniem w terminologię i notację oraz zdefiniowaniem pojęć, których znajomość jest niezbędna do dalszych rozważań. Następnie przedstawiono rozwiązanie analityczne problemu idealnej filtracji rozplotowej. Kolejno przedyskutowano błąd aproksymacji wynikający z nieuniknionej w praktycznej realizacji konieczności obcięcia szeregu nieskończonego, stanowiącego rozwiązanie analityczne.

### 2.1. Terminologia i podstawowe definicje

Większość obliczeniowych metod analizy i przetwarzania sygnałów posługuje się dyskretnymi reprezentacjami funkcji ciągłych. Przekształcenie funkcji ciągłej w jej dyskretną reprezentację polega na dyskretyzacji, której maksymalny interwał jest określony warunkiem Nyquista, sformułowanym w twierdzeniu Shannona o próbkowaniu. Zgodnie z tym twierdzeniem, przy spełnieniu warunku Nyquista, możliwa jest operacja odwrotna do dyskretyzacji, zwana interpolacją, umożliwiającą rekonstrukcję funkcji ciągłej w oparciu o jej reprezentację dyskretną. Na tej podstawie przyjmuje się, że przekształcenie funkcji ciągłej w dyskretną, oraz przekształcenie funkcji dyskretniej w ciągłą są w pełni odwracalne.

W niniejszej pracy pojęcie funkcji, niezależnie od tego jaką wielkość ona reprezentuje, będzie rozumiane jako funkcja rzeczywista argumentu dyskretnego, chyba że będzie to zastrzeżone inaczej. Funkcja argumentu dyskretnego jest ciągiem liczbowym, skończonym lub nieskończonym, którego zbiorem wartości jest podzbiór zbioru liczb rzeczywistych. Dziedziną tej funkcji jest najczęściej nieskończony zbiór liczb całkowitych lub jego skończony podzbiór. Mówimy, że funkcja jest dwustronna, jeżeli jej argument jest określony w zbiorze liczb całkowitych. Funkcje dwustronne są modelami sygnałów nieprzyczynowych (ang. noncausal signals). W zbiorze funkcji dwustronnych wyróżnia się dwa charakterystyczne podzbiory funkcji jednostronnych, a mianowicie:

- Funkcje prawostronne, które przyjmują wartość równą 0 dla argumentu całkowitego, ujemnego. Funkcje prawostronne są modelami sygnałów przyczynowych (ang. causal signals).
- Funkcje lewostronne, które przyjmują wartość równą 0 dla argumentu całkowitego, dodatniego. Funkcje lewostronne są modelami sygnałów antyprzyczynowych (ang. anti-causal signals).

Z tego względu następujące pary pojęć

- funkcja dwustronna  $\longleftrightarrow$  funkcja (sygnał lub odpowiedź impulsowa) nieprzyczynowa,
- funkcja prawostronna  $\longleftrightarrow$  funkcja (sygnał lub odpowiedź impulsowa) przyczynowa,
- funkcja lewostronna  $\longleftrightarrow$  funkcja (sygnał lub odpowiedź impulsowa) antyprzyczynowa,

będą traktowane jako tożsame i używane zamiennie.

W dalszej części pracy rozważane będą modele sygnałów i odpowiedzi impulsowych ograniczonych w czasie, chyba że będzie to zastrzeżone inaczej. Do ich matematycznego opisu można użyć zarówno funkcji przyczynowych, jak i nieprzyczynowych. Posłużenie się modelem nieprzyczynowym, który pozwala wykorzystać specyficzne własności funkcji dwustronnych, takich jak, np. parzystość lub nieparzystość, często umożliwia znaczne uproszczenie obliczeń. Co więcej, użycie do analizy klasy funkcji nieprzyczynowych pozwala oczekiwać, że otrzymane rezultaty mogą być lepsze, w sensie określonego kryterium, aniżeli w przypadku ograniczenia się do zbioru funkcji przyczynowych. Dodatkowo warto zauważyć, że znaczącą część współczesnych systemów przetwarzania sygnałów realizuje się przy użyciu komputera, który umożliwia posłużenie się funkcjami nieprzyczynowymi. Wreszcie należy podkreślić, że każdą ograniczoną w czasie funkcję nieprzyczynową można, poprzez operację przesunięcia o skończoną wartość, przekształcić w funkcję przyczynową.

Zgodnie z zasadniczym założeniem pracy wszystkie rozważane modele sygnałów i odpowiedzi impulsowych są opisane funkcjami ograniczonymi w czasie, co w świetle ostatniego z powyższych sformułowań oznacza, że do ich opisu można użyć klasy funkcji nieprzyczynowych. W takim przypadku podstawowe ograniczenie realizowalności wynika wyłącznie z nieuniknionego błędu obcięcia tych funkcji, które w wyniku rozwiązania określonego zagadnienia okazują się nieskończone. Funkcje przyczynowe lub antyprzyczynowe będą traktowane jako szczególne podzbiory klasy funkcji nieprzyczynowych.

Do przedstawienia przykładowej funkcji przyczynowej oraz nieprzyczynowej, oznaczonej symbolem  $s$ , używa się w pracy odpowiednio równoważnych notacji:

- zapis w postaci wektora wierszowego,

$$s \equiv [s_0, s_1, \dots, s_q], \quad \bar{s} \equiv [s_{-p}, \dots, s_0, \dots, s_q], \quad (2.1)$$

- zapis w postaci ciągu liczbowego,

$$\{s(n)\} \equiv \{s(0), s(1), \dots, s(q)\}, \quad \{\bar{s}(n)\} \equiv \{s(-p), \dots, s(0), \dots, s(q)\}, \quad (2.2)$$

- zapis w postaci sumy spłotowej,

$$\{s(n)\} \equiv \sum_{i=0}^q s(i) \cdot \delta(n-i), \quad \{\bar{s}(n)\} \equiv \sum_{i=-p}^q s(i) \cdot \delta(n-i), \quad (2.3)$$

gdzie sygnał określony funkcją delta Kroneckera,

$$\delta(n) \equiv \begin{cases} 1 & \text{dla } n=0 \\ 0 & \text{dla } n \neq 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

jest nazywany impulsem jednostkowym.

Liczba elementów funkcji  $\{s(n)\}$ , równa w ogólności

$$k = p + q + 1, \quad (2.5)$$

jest nazywana długością tej funkcji (sygnału lub odpowiedzi impulsowej). Dla funkcji przyczynowej  $p=0$ .

Dla dwóch funkcji nieprzyczynowych,  $\{s(n)\}$  o długości  $k$  danej przez (2.5) oraz  $\{h(n)\}$  o długości  $m=r+u+1$ , definiuje się spłot dyskretny  $\{g(n)\}$ ,

$$\{s(n)\} * \{h(n)\} = \{g(n)\}, \quad (2.6)$$

przy czym

$$g(n) \equiv \sum_{i=-p}^q s(i) \cdot h(n-i) = \sum_{i=-r}^u h(i) \cdot s(n-i), \quad (2.7)$$

Wynikiem operacji spłotu jest funkcja  $\{g(n)\}$  o długości  $k+m-1$ . Dla funkcji przyczynowych, w wyrażeniu (2.7)  $p=0$ ,  $r=0$ .

Przedstawiając funkcje  $\{g(n)\}$  oraz  $\{h(n)\}$  w postaci wektorów kolumnowych  $g^t$  i  $h^t$ , gdzie  $t$  oznacza operację transpozycji, zaś  $\{s(n)\}$  w postaci prostokątnej macierzy spłotowej Toeplitza  $S_T$ , operację spłotu można zapisać następująco:

$$S \cdot h^t = g^t, \quad (2.8)$$

gdzie:

$$S_T \equiv \begin{bmatrix} s_{-p} & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & s_{-p} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & s_0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_q & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & s_q & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & s_q \end{bmatrix} \left. \vphantom{\begin{bmatrix} s_{-p} \\ \cdot \\ \cdot \\ s_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ s_q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \right\} k+m-1 \quad (2.9)$$

m

Ze względu na przemienność operacji splotu wyrażoną w (2.7), zależność (2.8) można przedstawić w równoważnej postaci, w której funkcja  $\{s(n)\}$  jest dana w formie wektora kolumnowego, zaś funkcja  $\{h(n)\}$  – macierzą splotową Toeplitza. W prezentowanej pracy nie będziemy korzystali z tego zapisu.

## 2.2. Warunki istnienia i jednoznaczność rozwiązania problemu idealnej filtracji rozplotowej

Rozważmy sygnał wejściowy  $\{s(n)\}$ , który można znormalizować w taki sposób, żeby amplituda największej z próbek wynosiła 1. Próbka ta w dalszej części pracy będzie nazywana listkiem głównym, wszystkie pozostałe próbki o mniejszych amplitudach zwane będą listkami bocznymi. Sygnał  $\{s(n)\}$  można wówczas przedstawić jako sumę listka głównego  $\delta(n)$  i listków bocznych, tzn.

$$\{s(n)\} = \delta(n) + \sum_{\substack{i=-p \\ i \neq 0}}^q s(i) \cdot \delta(n-i) \quad (2.10)$$

Konsekwentnie, widmo sygnału  $\{s(n)\}$  można przedstawić jako:

$$\mathcal{F}[\{s(n)\}] = 1 + S_b(e^{j\omega}) \quad (2.11)$$

gdzie  $S_b(e^{j\omega})$  jest widmem listków bocznych, jedynka zaś reprezentuje widmo listka głównego.

Analogicznie do definicji idealnej filtracji rozplotowej zdefiniowanej dla funkcji ciągłych (patrz (1.3)), w zbiorze funkcji argumentu dyskretnego definicję taką można przedstawić następująco:

$$\{s(n) * \hat{h}(n)\} = \delta(n) \quad (2.12)$$

Zgodnie z zależnościami (1.4) i (2.11), transmitancja  $\hat{H}(e^{j\omega})$  idealnego filtru rozplotowego względem  $\{s(n)\}$  przyjmuje następującą postać:

$$\hat{H}(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 + S_b(e^{j\omega})} \quad (2.13)$$

Wykorzystując zależność określającą sumę szeregu geometrycznego, mamy

$$\hat{H}(e^{j\omega}) = 1 - S_b(e^{j\omega}) + S_b^2(e^{j\omega}) - S_b^3(e^{j\omega}) + S_b^4(e^{j\omega}) - \dots, \quad (2.14)$$

przy warunku,

$$|S_b(e^{j\omega})| < 1. \quad (2.15)$$

Z zależności (2.10) i (2.11) wynika, że

$$S_b(e^{j\omega}) = \sum_{\substack{i=-p \\ i \neq 0}}^q s(i) \cdot e^{-j\omega i}. \quad (2.16)$$

Można zatem napisać,

$$\left| \sum_{\substack{i=-p \\ i \neq 0}}^q s(i) \cdot e^{-j\omega i} \right| \leq \sum_{\substack{i=-p \\ i \neq 0}}^q |s(i) \cdot e^{-j\omega i}| \leq \sum_{\substack{i=-p \\ i \neq 0}}^q |s(i)|, \quad (2.17)$$

co oznacza, że nierówność (2.15) jest spełniona, jeżeli zachodzi następujący warunek:

$$\sum_{\substack{i=-p \\ i \neq 0}}^q |s(i)| < 1. \quad (2.18)$$

Warunek (2.18) oznacza, że w sygnale  $\{s(n)\}$  suma modułów wartości amplitud wszystkich listków bocznych musi być mniejsza od modułu amplitudy listka głównego. W literaturze dotyczącej zagadnień korekcji charakterystyki cyfrowych kanałów transmisji danych suma ta jest nazywana "zniekształceniami szczytowymi" (ang. peak distortions) np. [152], lub [197]. Z rozważań tych wynika wniosek, że w ogólnym przypadku odpowieź impulsowa idealnego filtru rozplotowego jest ciągiem nieskończonym  $\{h(n)\}$ , który na podstawie (2.14) można przedstawić jako:

$$\{h(n)\} = \delta(n) + \mathcal{F}^{-1} \left[ \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \cdot S_b^i(e^{j\omega}) \right]. \quad (2.19)$$

Wniosek taki można wyprowadzić również na gruncie algebry splotowej, np. [224], [252]. W [252] udowodniono istnienie i jednoznaczność rozwiązania w przestrzeni  $L_1$  dla odpowiedzi impulsowej filtru rozplotowego względem sygnałów jednostronnych (tj. przyczynowych lub antyprzyczynowych) i dwustronnych (tj. nieprzyczynowych). Przestrzeń  $L_1$  jest określona w zbiorze wszystkich funkcji  $\{s(i)\}$  takich, że

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} |s(i)| < \infty, \quad (2.20)$$

z normą

$$\|s\|_1 \equiv \sum_{i=-\infty}^{\infty} |s(i)|. \quad (2.21)$$

Dodatkowo, oznaczając

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} |s(i)| = c, \quad (2.22)$$

wykazuje się w [252], że dla funkcji jednostronnych  $\{s(n)\}$ , zarówno skończonych jak i nieskończonych, zachodzą następujące stwierdzenia:

- Jeżeli

$$c < 1, \quad (2.23)$$

to istnieje jednoznaczne rozwiązanie  $\{\hat{h}(n)\}$  należące do przestrzeni  $L_1$ .

- Jeżeli  $c = 1$ , to istnieje jednoznaczne rozwiązanie  $\{\hat{h}(n)\}$ , które w ogólności nie należy do przestrzeni  $L_1$ .

- Jeżeli  $c > 1$ , to istnieje jednoznaczne rozwiązanie  $\{\hat{h}(n)\}$ , które w ogólności jest funkcją nieograniczoną.

Z kolei, dla funkcji  $\{s(n)\}$  dwustronnych, skończonych, (2.10), spełniających warunek (2.18), równoważny (2.23), zachodzą następujące stwierdzenia:

- Istnieje jednoznaczne rozwiązanie należące do przestrzeni  $L_1$ .

- Mogą istnieć inne rozwiązania nie należące do przestrzeni  $L_1$ .

Koniecznym warunkiem istnienia rozwiązania  $\{\hat{h}(n)\}$  w przestrzeni  $L_1$  jest, aby zarówno w przypadku sygnałów jednostronnych, jak i dwustronnych listek główny sygnał  $\{s(n)\}$  znajdował się w początku układu. W istotny sposób ogranicza to klasę sygnałów przyczynowych, dla których przy spełnionym warunku (2.23) próbka  $s(0)$  w (2.2) lub (2.3) przyjmuje wartość maksymalną. W klasie sygnałów przyczynowych warunek ten spełniają sygnały minimalnofazowe. Z tego powodu pojęcia sygnał minimalnofazowy i sygnał posiadający inwersję uważa się za równoważne, np. [274].

W realizacjach praktycznych musimy się ograniczyć do przybliżonego przedstawienia odpowiedzi impulsowej idealnego filtra rozplotowego  $\{\hat{h}(n)\}$ . Najogólniej ujmując, przybliżenie to polega na zastąpieniu ciągu nieskończonego, danego wzorem (2.19), ciągiem o skończonej liczbie wyrazów. Najprostszym sposobem polega na zastąpieniu nieskończonego szeregu we wzorze (2.19) pewną jego sumą częściową. Metodę tę przedstawiono w następnym rozdziale.

### 2.3. Przybliżone rozwiązanie problemu filtracji rozplotowej przez obcięcie nieskończonego szeregu

Rozważmy konsekwencje jakie wynikają z zastąpienia nieskończonego szeregu we wzorze (2.19) jego sumą częściową. Z warunku (2.15) wynika, że następująca norma

$$\|\hat{h}\|_1 \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{h}(n)|, \quad (2.24)$$

ma wartość skończoną, tj. rozwiązanie  $\{\hat{h}(n)\}$  należy do przestrzeni  $L_1$ .

Jak wiadomo, w takim przypadku sensowne, a przy tym najprostsze z technicznego punktu widzenia, realizowalne przybliżenie nieskończonej odpowiedzi impulsowej  $\{\hat{h}(n)\}$  polega na zastąpieniu nieskończonego szeregu w (2.19) stosownie przyjętą  $k$ -tą sumą częściową. Korzystając z zależności na sumę szeregu geometrycznego można wykazać, że sygnał wyjściowy  $\{g^{<k>}(n)\}$  "obciążonego" filtru rozplotowego, pobudzonego sygnałem  $\{s(n)\}$ , względem którego dokonuje się rozplatania, wynosi:

$$\{g^{<k>}(n)\} = \delta(n) + (-1)^k \cdot \mathcal{F}^{-1} \left[ \{S_b(e^{j\omega})\}^{k+1} \right] \quad (2.25)$$

Element  $\delta(n)$  w powyższej zależności jest, w myśl definicji (2.12), pożądanym rezultatem, podczas gdy wyrażenie

$$\{e^{<k>}(n)\} = (-1)^k \cdot \mathcal{F}^{-1} \left[ \{S_b(e^{j\omega})\}^{k+1} \right] \quad (2.26)$$

jest nieuniknionym błędem obciążenia [72], [73], [252]. Z własności operacji splotu wynika, że błąd  $\{e^{<k>}(n)\}$  można przedstawić w formie  $k$ -krotnego autospłotu listków bocznych, które są reprezentowane przez sumę po prawej stronie wyrażenia (2.10). Zagadnienie aproksymacji odpowiedzi impulsowej idealnego filtru rozplotowego poprzez obciążenie nieskończonego szeregu w (2.19) zostało przedyskutowane w pracach autora [72], [73], [252] i [253]. W szczególności w [252] wyprowadzono oszacowania błędu obciążenia dla funkcji jednostronnych i dwustronnych danych wzorem (2.19). I tak, dla sygnałów  $\{s(n)\}$  jednostronnych, skończonych i nieskończonych, oraz dwustronnych, skończonych, przy spełnieniu warunku (2.23), istnieje w  $L_1$  rozwiązanie  $\{\hat{h}(n)\}$ , takie że

$$\|\hat{h}\|_1 \leq \frac{1}{1-c} \quad (2.27)$$

Oprócz tego, dla sygnałów  $\{s(n)\}$  jednostronnych i dwustronnych, skończonych o długościach odpowiednio  $q+1$  i  $q+p+1$  (patrz (2.5)) i  $c$  danym przez (2.22), zachodzą następujące nierówności:

$$|\hat{h}(kq+i)| \leq \frac{c^{k+1}}{1-c} \quad , \quad i = 1, \dots, q, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.28)$$

$$\sum_{i=kq+1}^{\infty} |\hat{h}(i)| \leq \frac{qc^{k+1}}{1-c} \quad , \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.29)$$

Dodatkowo, dla sygnałów dwustronnych, skończonych (2.10) mamy również:

$$|\hat{h}(-kp-i)| \leq \frac{c^{k+1}}{1-c} \quad , \quad i = 1, \dots, p, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.30)$$

$$\sum_{i=-kp-1}^{-\infty} |\hat{h}(i)| \leq \frac{pc^{k+1}}{1-c} \quad , \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.31)$$

Nierówności (2.28) i (2.30) dają oszacowanie  $i$ -tego wyrazu odpowiedzi impulsowej idealnego filtru rozplotowego, zaś (2.29) i (2.31) - oszacowanie reszty, mającej tutaj sens błędu obciążenia.

W [72] i [73] wykazano, że gdy sygnały, względem których dokonuje się rozplatania są przypadkowe, obcięcie nieskończonego szeregu jest skuteczniejsze, tzn. powoduje mniejszy błąd aproksymacji niż w przypadku sygnałów parzystych. W [72] zaproponowano efektywny algorytm wyznaczania w dziedzinie czasu odpowiedzi impulsowej "obciętego" filtra rozplotowego. W [253] wykorzystano wyniki pracy [252] do rozwiązywania równań splotowych, w zastosowaniu do nieparametrycznej identyfikacji systemów liniowych. W szczególności przeanalizowano wpływ błędu obcięcia odpowiedzi impulsowej filtra rozplotowego oraz błędu pomiaru sygnału wyjściowego identyfikowanego systemu na dokładność określenia jego odpowiedzi impulsowej.

Na podstawie dotychczasowych rozważań można stwierdzić, co następuje:

- Aproksymacja odpowiedzi impulsowej  $\{\hat{h}(n)\}$  idealnego filtra rozplotowego poprzez obcięcie nieskończonego szeregu w (2.19) ma sens wtedy, gdy ciąg jego reszt dąży do zera. Warunek ten jest równoważny wymogowi istnienia rozwiązania  $\{\hat{h}(n)\}$  w przestrzeni  $L_1$ .
- Jeżeli jest spełniona nierówność (2.23), to istnieje rozwiązanie  $\{\hat{h}(n)\}$  w przestrzeni  $L_1$  dla funkcji jednostronnych, (sygnałów przyczynowych lub antyprzyczynowych), skończonych i nieskończonych oraz dwustronnych, (sygnałów nieprzyczynowych), skończonych. Nierówność ta ogranicza klasę sygnałów  $\{s(n)\}$ , względem których można wyznaczyć rozwiązanie  $\{\hat{h}(n)\} \in L_1$ .
- Ponieważ postępowanie polegające na obcięciu nieskończonego szeregu w (2.19) nie ma charakteru optymalizacyjnego, należy wnioskować, że dla zadanej długości odpowiedzi impulsowej możliwe jest wyznaczenie innego rozwiązania przybliżonego, charakteryzującego się mniejszą wartością błędu aproksymacji w sensie określonego kryterium.

W świetle powyższych wniosków zasadne jest poszukiwanie rozwiązania dla odpowiedzi impulsowej filtra rozplotowego przy użyciu bardziej zaawansowanych metod aproksymacyjnych. Można oczekiwać, że użycie takich metod pozwoli wyznaczyć rozwiązanie, charakteryzujące się mniejszą wartością błędu aproksymacji i nie podlegające ograniczeniu warunkiem (2.23).

W tym kontekście wyznaczenie skończonego ciągu, będącego najlepszym, w sensie określonego kryterium, przybliżeniem ciągu nieskończonego, reprezentującego odpowiedź impulsową idealnego filtra rozplotowego, jest głównym wątkiem niniejszej pracy. Jest to zagadnienie aproksymacyjne, a sformułowanie i częściowe jego rozwiązanie przedstawione jest w następnym rozdziale.