

3. FILTRACJA ROZPLOTOWA W UJĘCIU APROKSYMACYJNYM

3.1. Sformułowanie problemu filtracji rozplotowej na gruncie teorii aproksymacji

Z treści rozdziału 2.2 wynika, że przy określonych założeniach dotyczących $\{s(n)\}$ istnieje rozwiązanie problemu idealnej filtracji rozplotowej w postaci nieskończonej odpowiedzi impulsowej $\{h(n)\}$. W praktycznych zastosowaniach konieczność zastąpienia nieskończonej funkcji $\{h(n)\}$ jej skończonym przybliżeniem jest głównym źródłem błędu. Załóżmy, że funkcja $\{h(n)\}$ będąca skończonym przybliżeniem dokładnego rozwiązania $\{\hat{h}(n)\}$ ma postać,

$$\{h(n)\} = h(0) \cdot \delta(n) + \sum_{\substack{i=-r \\ i \neq 0}}^u h(i) \cdot \delta(n-i), \quad (3.1)$$

gdzie r, u są dowolnymi liczbami całkowitymi, zaś $h(0)$ jest amplitudą listka głównego położonego w początku układu współrzędnych. Liczba

$$m = r + u + 1 \quad (3.2)$$

definiuje wówczas długość odpowiedzi impulsowej (3.1) filtru rozplotowego.

Założmy dodatkowo, że sygnał, względem którego dokonujemy rozplatania jest zdefiniowany przez (2.10), a jego długość k dana jest wzorem (2.5). Przyjęliśmy tu, że sygnał $\{s(n)\}$ jest znormalizowany w taki sposób, aby listek główny znajdował się w początku układu współrzędnych, a jego amplituda wynosiła 1. Wówczas wynik splotu $\{s(n)\} * \{h(n)\}$ jest w ogólności ciągiem $\{g(n)\}$ o długości $k+m-1$, o postaci:

$$\{g(n)\} = \delta(n) + \{\varepsilon(n)\}, \quad (3.3)$$

gdzie:

$$\{\varepsilon(n)\} = \sum_{\substack{i=-v \\ i \neq 0}}^w g(i) \cdot \delta(n-i).$$

Również i w tym przypadku założyliśmy, że funkcja $\{h(n)\}$ jest znormalizowana w taki sposób, żeby listek główny funkcji $\{g(n)\}$ znajdował się w początku układu współrzędnych, a jego amplituda wynosiła 1. Liczby v, w definiujące długość funkcji $\{g(n)\}$ są określone następującą zależnością:

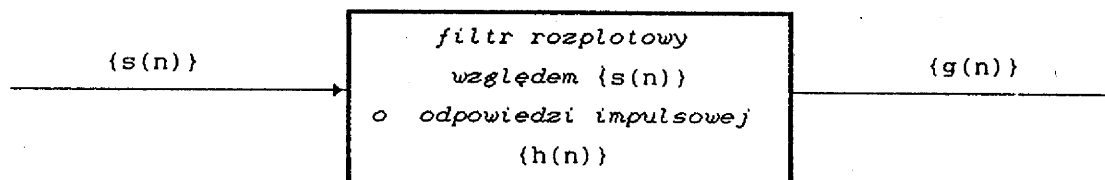
$$v + w = k + m - 2 = p + q + r + u \quad (3.4)$$

Funkcja $\{g(n)\}$ (3.3) składa się z dwóch składników: funkcji $\delta(n)$ będącej, w myśl definicji (2.12), pożądanym rezultatem oraz $\{\varepsilon(n)\}$ reprezentującej błąd aproksymacji wynikający z zastąpienia nieskończonej funkcji (2.19) funkcją skończoną, daną wzorem (3.1). W tym świetle, zmodyfikowana definicja problemu filtracji rozplotowej ma postać

$$\{s(n)\} * \{h(n)\} = \{g(n)\}, \quad (3.5)$$

zaś głównym zadaniem niniejszej pracy jest minimalizacja określonej miary błędu aproksymacji $\{\varepsilon(n)\}$ zdefiniowanego wyrażeniem (3.3).

Tak sformułowane zagadnienie filtracji rozplotowej ma interpretację fizyczną, przedstawioną na rys. 3.



Rys. 3. Interpretacja fizyczna filtra rozplotowego względem $\{s(n)\}$.

Dla uproszczenia terminologii, sygnał $\{s(n)\}$, względem którego wyznacza się $\{h(n)\}$ nazywa się w dalszej części pracy sygnałem wejściowym, sygnał $\{g(n)\}$ - sygnałem wyjściowym, zaś $\{h(n)\}$ - odpowiedzią impulsową.

Uwzględniając założenia zawarte w definicjach (2.5), (2.10), (3.1), (3.2), (3.3) wprowadźmy zbiór H_m , którego elementami są wszystkie funkcje $\{h(n)\}$ o określonej długości, równej m . W tym kontekście wyznaczenie rozwiązania problemu filtracji rozplotowej polega na znalezieniu takiego elementu zbioru H_m , który minimalizuje, w sensie określonego kryterium, błąd aproksymacji $\{e(n)\}$, (patrz (3.3)).

Normatywne kryterium błędu aproksymacji jest zazwyczaj definiowane przez rodzinę norm w przestrzeniach L_p , określoną następująco, np. [43],

$$\|f - \hat{f}\|_p \equiv \left[\int_a^b |f(x) - \hat{f}(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1, \quad (3.6)$$

gdzie $\hat{f}(x)$ jest funkcją aproksymowaną, $f(x)$ - funkcją aproksymującą, zaś a , b dowolnymi liczbami rzeczywistymi, $a < b$.

W nawiązaniu do (2.12), (3.3) i (3.4) można wykazać, że dla rozważanego tu problemu filtracji norma błędu wynosi:

$$\|g - \delta\|_p = \left[\sum_{i=-v}^w |g(i)|^p \right]^{\frac{1}{p}}, \quad i \neq 0 \quad (3.7)$$

Z matematycznego punktu widzenia, rozwiązanie dyskutowanego zagadnienia w ujęciu aproksymacyjnym polega na wyznaczeniu funkcji $\{h(n)\}$ (3.1) w taki sposób, żeby dla określonej wartości p wielkość błędu aproksymacji, zdefiniowana normą $\|g - \delta\|_p$ (3.7), przyjęła wartość minimalną.

Teoretycznie, dopuścić można dowolną wartość $p \geq 1$. Ze względów praktycznych wszelako, rozważa się najczęściej trzy przypadki, tj. $p=1$, $p=2$ i $p=\infty$. Również w pracy ograniczono się do tych przypadków. Dla $p=1$ istnieje rozwiązanie analityczne zagadnienia minimalizacji błędu według normy (3.7), które opublikował po raz pierwszy R. W. Lucky w 1965 r., [152]. Rozwiązaniu temu odpowiada filtr ZFF, tj. filtr wymuszający zera w sygnale wyjściowym, używany w szczególności jako korektor charakterystyki transmisyjnej (odpowiedzi impulsowej) systemów przesyłania danych cyfrowych, np. [197], [228]. Dla przypadku $p=2$ również istnieje rozwiązanie analityczne, które otrzymuje

się poprzez rozwiązanie układu liniowych równań normalnych. Za prekursora metody minimalizacji błędu aproksymacji w przestrzeni L_2 uważa się Gaussa, np. [54]. Norma w przestrzeni L_2 jest wykorzystywana najczęściej z następujących powodów:

- jest różniczkowalna (w przeciwieństwie np. do normy w przestrzeni L_1),
- zawsze istnieje rozwiązanie problemu jej minimalizacji,
- rozwiązanie problemu minimalizacji sprowadza się do rozwiązania układu równań liniowych.

Zagadnienie minimalizacji błędu aproksymacji w przestrzeniach L_p dla $p \neq 2$ prowadzi na ogół do równań nieliniowych, których rozwiązanie jest bardziej złożone. Z tych powodów praktyczne znaczenie norm dla skończonych wartości $p > 2$ jest niewielkie. Należy również zwrócić uwagę, że wszystkie normy w przestrzeniach L_p dla $p < \infty$ umożliwiają minimalizację błędu aproksymacji w określonym przedziale. W pewnych zastosowaniach, np. projektowaniu anten [94], zachodzi jednak konieczność minimalizacji błędu aproksymacji w każdym punkcie przedziału określoności funkcji aproksymowanej i aproksymującej. Minimalizację taką zapewnia użycie normy błędu w przestrzeni L_∞ . Z tego powodu norma błędu dla $p = \infty$ ma również istotne znaczenie praktyczne. Niestety, zagadnienie minimalizacji błędu zdefiniowanego tą normą nie posiada w ogólności rozwiązania analitycznego, znane są natomiast iteracyjne metody rozwiązywania tego problemu, np. [24].

3.2. Rozwiązanie problemu filtracji rozplotowej w przestrzeni L_1

W nawiązaniu do (3.7), rozwiązanie zagadnienia filtracji rozplotowej w przestrzeni L_1 sprowadza się do wyznaczenia $\{h(n)\}$ w taki sposób, żeby wielkość błędu aproksymacji, której miarą jest norma $\|g-\delta\|_1$, osiągnęła wartość minimalną. Innymi słowy, należy wyznaczyć $\{h(n)\}$ tak, żeby norma $\|g-\delta\|_1$ przyjęła minimalną wartość równą ε_1 , tzn.

$$\varepsilon_1 = \min_{\substack{\{h(n)\} \in H_m \\ i \neq 0}} \sum_{\substack{i=-v \\ i \neq 0}}^w |g(i)| \quad (3.8)$$

gdzie H_m jest zbiorem wszystkich funkcji $\{h(n)\}$ o długości m , które przyjmują tożsamościowo wartość równą 0 dla $n = -(r+1), -(r+2), \dots$, oraz $n = u+1, u+2, \dots$ (patrz (3.1) i (3.2)).

Jak już stwierdzono w rozdziale 3.1, rozwiązanie tak postawionego problemu zostało po raz pierwszy podane w pracy R. W. Lucky [152], a reprezentujący je filtr liniowy jest nazywany ZFF. Teoria podana w tej pracy, jak również w pracach późniejszych stanowi, że jednoznaczne rozwiązanie tego problemu w przestrzeni L_1 istnieje pod warunkiem, że spełniona jest nierów-

ność (2.18). Suma po lewej stronie nierówności (2.18) jest zwana "znieskształceniami szczytowymi" (ang. peak distortions) [152], [169], [197]. W zastosowaniach praktycznych czyni się dodatkowe założenie, że poszukiwana odpowiedź impulsowa jest określona w przedziale symetrycznym wokół listka głównego, tzn. [228],

$$\{h(n)\} = h(0) \cdot \delta(n) + \sum_{\substack{i=-r \\ i \neq 0}}^r h(i) \cdot \delta(n-i) \quad (3.9)$$

Minimum normy błędu aproksymacji osiąga się przy warunku, że w sygnale wyjściowym $\{g(n)\}$ występuje $2r$ zer położonych symetrycznie wokół listka głównego. Nazwa filtra ZFF jest ilustracją tej własności.

Porównując (3.1) i (3.9) zauważamy, że długości ciągów $\{h(n)\}$ (patrz (3.2)) oraz $\{g(n)\}$ (patrz (3.4)) wynoszą teraz odpowiednio:

$$m = 2r + 1 \quad (3.10)$$

oraz

$$v + w = k + m - 2 = p + q + 2r \quad (3.11)$$

Biorąc dodatkowo pod uwagę (2.5), jak również korzystając z zapisu splotu w formie macierzowej (2.8) i (2.9), zagadnienie filtracji rozplotowej z minimalizacją błędu w przestrzeni L_1 można przedstawić w następującej postaci:

$$\begin{bmatrix} s_{-p} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ s_{-p+1} & s_{-p} & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & s_{-p+1} & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ s_0 & \dots & \dots & s_{-p} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & s_0 & \dots & s_{-p+1} & \dots & 0 & 0 \\ s_{q-1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ s_q & s_{q-1} & \dots & s_0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & s_q & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & s_{q-1} & \dots & s_0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & s_q & \dots & \dots & s_0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & s_{q-1} & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & s_q & s_{q-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & s_q \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_{-r} \\ \dots \\ h_1 \\ h_0 \\ h_{-1} \\ \dots \\ h_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{-r-p} \\ \dots \\ g_{-r-1} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ g_{r+1} \\ \dots \\ g_{r+q} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Poszukiwaną odpowiedź impulsową filtra ZFF, daną w postaci wektora $h = [h_{-r}, \dots, h_0, \dots, h_r]$, otrzymujemy poprzez rozwiązanie następującego układu $2r+1$ równań liniowych, który został "wycięty" z (3.12).

$$\begin{bmatrix} s_0 & & & s_{-p} & & 0 & 0 \\ & s_0 & & s_{-p+1} & & 0 & 0 \\ s_{q-1} & & & & & & 0 \\ s_q & s_{q-1} & & s_0 & & & \\ 0 & s_q & & & & & \\ 0 & 0 & & s_{q-1} & & s_0 & \\ 0 & 0 & & s_q & & & s_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_{-r} \\ \cdot \\ h_1 \\ h_0 \\ h_{-1} \\ \cdot \\ h_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Na mocy (3.7), wartość błędu aproksymacji $\|g-\delta\|_1$ wynika tu natychmiast z (3.12), jako:

$$\|g-\delta\|_1 = \sum_{i=1}^p |g(-r-i)| + \sum_{i=1}^q |g(r+i)| \quad (3.14)$$

Wielkość ta w technice korekcji charakterystyk cyfrowych kanałów transmisji nosi nazwę "zniekształceń wyjściowych", np. [152].

Rezultaty powyższych rozważań uzyskano przy założeniu uzasadnionym względami technicznymi, że poszukiwana odpowiedź impulsowa $\{h(n)\}$ o długości $2r+1$ jest określona symetrycznie wokół listka głównego (patrz (3.9)). Założenie to wymusza symetryczne położenie zer wokół listka głównego $\{g(n)\}$ (patrz (3.12)). Nasuwa się w tym miejscu pytanie, czy dla danej długości odpowiedzi impulsowej filtru równej $2r+1$ założenie (3.9) zapewnia minimum błędu w sensie normy $\|g-\delta\|_1$. W ogólnym przypadku odpowiedź jest negatywna. Ilustruje to prosty przykład, w którym sygnał wejściowy $\{s(n)\} = \{-1, 3, 10, 0, 2, -1, 1\}$, a założona długość odpowiedzi impulsowej wynosi 3. Mamy tutaj 3 następujące możliwości:

1. $\{h(n)\} = \{h(0), h(1), h(2)\}$,
2. $\{h(n)\} = \{h(-1), h(0), h(1)\}$, (założenie (3.9)),
3. $\{h(n)\} = \{h(-2), h(-1), h(0)\}$.

Po wykonaniu obliczeń zgodnie z (3.13) i znormalizowaniu dla przejrzystości wyniku - odpowiedzi impulsowej w taki sposób, aby jej listek główny $h(0)$ miał amplitudę równą 1, otrzymujemy następujące wartości błędu aproksymacji, przedstawione w Tabelicy 1.

Tabelica 1

Lp	$\{h(n)\}$	$\ g-\delta\ _1$
1	$\{1, 0.06, -0.2\}$,	0.5607
2	$\{-0.2941, 1, 0.05882\}$	0.6532
3	$\{0.19, -0.3, 1\}$,	0.6397

Na mocy (3.8), minimalna wartość błędu aproksymacji wynosi $\varepsilon_1 \cong 0.5607$.

Powyższy przykład dowodzi, że dla założonej długości odpowiedzi impulsowej minimum normy błędu aproksymacji ε_1 niekoniecznie jest osiągnięte dla przypadku w którym spełnione jest założenie (3.9). W ogólnym przypadku odpowiedzi impulsowej o założonej długości m (patrz (3.2)) należy wyznaczyć m jej możliwych rozwiązań i wybrać z nich takie, które charakteryzuje się minimalną wartością $\|g-\delta\|_1$. Wartość ta jest równa ε_1 . Jeżeli założona długość $\{h(n)\}$ będzie wyrażona liczbą nieparzystą, to może się zdarzyć, że minimum $\|g-\delta\|_1$ zostanie osiągnięte dla tego z jej rozwiązań, które spełnia warunek (3.9). Autorowi nie są znane prace, które poruszałyby dyskutowane w tym rozdziale zagadnienie filtracji rozplotowej dla przypadków, w których założenie (3.9) nie jest spełnione. Z tego powodu, pomimo ogólnego charakteru pracy, uznano za konieczne przedstawienie powyższego przykładu obliczeniowego. Wykazuje on, że rozwiązanie uważane za optymalne nie zawsze takim jest.

3.3. Rozwiązanie problemu filtracji rozplotowej w przestrzeni L_2

Analogicznie, jak w przypadku przestrzeni L_1 , rozwiązanie zagadnienia filtracji rozplotowej w przestrzeni L_2 sprowadza się do wyznaczenia $\{h(n)\}$ w taki sposób, żeby wielkość błędu aproksymacji, której miarą jest norma $\|g-\delta\|_2$, osiągnęła wartość minimalną równą ε_2 .

$$\varepsilon_2 = \min_{\{h(n)\} \in H_m} \left[\sum_{i=-v}^w |g(i)|^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.15)$$

gdzie H_m jest zbiorem wszystkich funkcji $\{h(n)\}$ o długości m , które przyjmują tożsamościowo wartość równą 0 dla $n = -(r+1), -(r+2), \dots$, oraz $n = u+1, u+2, \dots$, (patrz (3.1) i (3.2)).

Zagadnieniu minimalizacji normy błędu aproksymacji w przestrzeni L_2 poświęcono wiele prac o charakterze monograficznym, np. [54], [115], [168], [209], [274]. Z tego względu, w niniejszej pracy nie zamieszczono wyprowadzenia rozwiązania tego problemu.

W ogólnym przypadku, minimalizację wartości normy błędu aproksymacji w przestrzeni L_2 uzyskuje się poprzez rozwiązanie liniowego układu równań normalnych. W szczególnym przypadku analizowanego tu zagadnienia filtracji rozplotowej, minimalizacja tego błędu wymaga rozwiązania $v+w+1$ układów równań normalnych (patrz (3.4)), danych następująco w postaci macierzowej.

$$R_{ss} \cdot h_L^t = S_T^t \cdot d_L^t, \quad (3.16)$$

gdzie

$$R_{ss} \equiv S_T^t \cdot S_T, \quad (3.17)$$

jest macierzą korelacji sygnału $\{s(n)\}$, (patrz (2.9)),

$\{d_L\}$ - jest rodziną wektorów wierszowych o długości $v+w+1$, zdefiniowanych dla $L=0,1,\dots,v+w$ jako

$$\{d_L\} = [0, 0, 0, \dots, 1, \dots, 0, 0] , \quad (3.18)$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow$
 $0 \quad 1 \quad 2 \quad \quad L \quad \quad v+w$

która reprezentuje sobą wyidealizowane rozwiązanie problemu filtracji rozplotowej danego definicją (2.12),

$\{h_L\}$ - jest rodziną wektorów wierszowych o długości m , (patrz (3.2)), $L=0,1,\dots,v+w$, z których jeden jest rozwiązaniem zagadnienia minimalizacji (3.15).

Jak wynika z powyższego, celem wyznaczenia optymalnej w L_2 odpowiedzi impulsowej, która realizowałaby (3.15), należy wyznaczyć rodzinę rozwiązań h_L , ($L=0,1,\dots,v+w$), i wybrać to z nich, dla którego norma $\|g-\delta\|_2$ przyjmuje wartość minimalną, wynoszącą ε_2 . Każdemu z rozwiązań h_L odpowiada sygnał wyjściowy g_L o postaci:

$$g_L = [g_0, g_1, \dots, g_L, \dots, g_{v+w}] . \quad (3.19)$$

Z własności aproksymacji w przestrzeni L_2 (twierdzenie o rzucie ortogonalnym) wynika, że wartość błędu aproksymacji może być zinterpretowana jako różnica energii sygnału aproksymowanego i aproksymującego, np. [148]. Stosując tę własność odpowiednio do (3.18) i (3.19), otrzymujemy,

$$g_L = \sum_{i=0}^{v+w} g_i^2 . \quad (3.20)$$

W wyrażeniu (3.20) g_L jest listkiem głównym sygnału wyjściowego. Biorąc pod uwagę, że norma błędu $\|g-\delta\|_2$ została zdefiniowana przy założeniu, iż amplituda listka głównego w sygnale wyjściowym $\{g(n)\}$ jest równa 1, (patrz (3.3)), można wykazać, że wartość błędu określonego tą normą jest dana następującym wzorem:

$$\|g-\delta\|_2 = \left[\frac{1}{g_L} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} . \quad (3.21)$$

Wartość L dla której wartość błędu $\|g-\delta\|_2$ przyjmuje minimum, tzn. równa jest ε_2 , nazywa się opóźnieniem optymalnym, np. [209]. Jest rzeczą intuicyjnie oczywistą, że wartość tego opóźnienia pozostaje w pewnym związku z postacią sygnału wejściowego $\{s(n)\}$. Dla ogólnego przypadku $\{s(n)\}$ istota tego związku nie jest rozpoznana i nie istnieją reguły, które pozwoliłyby wyznaczyć w sposób analityczny wartość opóźnienia optymalnego. Dlatego też, celem wyznaczenia optymalnej odpowiedzi impulsowej realizującej (3.15), konieczne jest wyznaczenie całej rodziny h_L . W przypadkach szczególnych sygnału $\{s(n)\}$ istnieją reguły, które pozwalają określić a priori wartość opóźnienia optymalnego [209], rozdz. 8.

Tablica 2

L	$\{h_L(n)\}$	$\ g-\delta\ _2$
1	{ -1, 0.1938, 0.0635 }	10.4685
2	{ 1, -0.5056, 0.0012 }	2.9795
3	{ 1, 0.1431, -0.2336 }	0.3063
4	{ -0.2182, 1, 0.1089 }	0.3129
5	{ 0.1384, -0.2355, 1 }	0.2999
6	{ -0.6137, 1, -0.1434 }	3.8637
7	{ 0.5009, -0.7580, 1 }	4.2088
8	{ -0.1063, 1, -0.9727 }	6.6841
9	{ -0.0634, -0.1938, 1 }	10.4685

W Tablicy 2 przedstawiono przykładowe wyniki obliczeń błędu aproksymacji dla trójelementowej odpowiedzi impulsowej. Obliczeń dokonano dla sygnału $\{s(n)\} = \{-1, 3, 10, 0, 2, -1, 1\}$, który w rozdziale 3.2 posłużył jako ilustracja własności rozwiązania zagadnienia filtracji rozplotowej w przestrzeni L_1 (Tablica 1). Liczba możliwych rozwiązań, które zgodnie z (3.4) i (3.18) należy wziąć pod uwagę, wynosi 9. Podobnie jak w przypadku wyników zestawionych w Tablicy 1, odpowiedzi impulsowe znormalizowano dla przejrzystości w taki sposób, aby ich listek główny miał amplitudę równą 1. Na mocy (3.15), minimalna wartość błędu aproksymacji wynosi $\varepsilon_2 \cong 0.2999$, a wartość opóźnienia optymalnego $L_{opt} = 5$.

3.4. Porównanie rozwiązań problemu filtracji rozplotowej w przestrzeniach L_1 i L_2

Z dotychczasowej analizy wynika, że ważnym czynnikiem zagadnienia filtracji rozplotowej jest warunek (2.18), narzucający wyraźne ograniczenie na klasę sygnałów wejściowych $\{s(n)\}$. Dla sygnałów $\{s(n)\}$ należących do klasy ograniczonej tym warunkiem istnieje zarówno jednoznaczne rozwiązanie problemu idealnej filtracji rozplotowej w przestrzeni L_1 , dane w ogólności szeregiem nieskończonym, jak również istnieją w L_1 i L_2 optymalne rozwiązania przybliżone, będące funkcjami skończonymi. Charakter warunku (2.18) podkreśla specyfikę przyjętego modelu sygnału $\{s(n)\}$ (2.10), w którym wyodrębnia się listek główny oraz listki boczne. W tym kontekście zagadnienie filtracji rozplotowej jest często określane jako problem redukcji listków bocznych w sygnale $\{s(n)\}$ np. [60], [69], [70], [71], [73], [93], [97].

Jak wynika z analizy przeprowadzonej w rozdziale 3.2 i 3.3, charakter obliczeń związanych z wyznaczeniem optymalnej odpowiedzi impulsowej $\{h(n)\}$ w przestrzeniach L_1 i L_2 jest bardzo podobny. W obydwu przypadkach nie są w

ogólności znane reguły, które pozwalałyby analitycznie wyznaczyć wartość opóźnienia optymalnego, a co za tym idzie określić optymalną odpowiedź impulsową. Tę ostatnią wyznacza się więc poprzez rozważenie m (patrz (3.2)) lub $v+w+1$ (patrz (3.4)) możliwych odpowiedzi impulsowych $\{h(n)\}$, odpowiednio w przestrzeniach L_1 lub w L_2 . Każdą z tych odpowiedzi otrzymuje się poprzez rozwiązanie układu m równań liniowych. Z (3.2) i (3.4) wynika więc, że dla długich sygnałów $\{s(n)\}$ i krótkich w porównaniu z nimi odpowiedzi impulsowych $\{h(n)\}$ ($m \ll v+w+1$), co w praktyce jest dość częstym przypadkiem, uzyskanie rozwiązania w przestrzeni L_1 wymaga rozwiązania znacznie mniejszej liczby układów równań niż w przypadku L_2 . W ogólnym przypadku wartości opóźnienia optymalnego w przestrzeniach L_1 i L_2 nie są identyczne - przykładową ilustracją są tu między innymi wyniki przedstawione w Tablicach 1 i 2. Tym niemniej, na podstawie szeregu przykładów daje się zaobserwować, że wartość optymalnego opóźnienia w L_2 leży w bliskim otoczeniu lub niejednokrotnie jest równa optymalnemu opóźnieniu w L_1 . Z tego względu przy poszukiwaniu rozwiązania optymalnego w L_2 , w przypadku gdy $m \ll v+w+1$, można najpierw wyznaczyć rozwiązanie w L_1 , które umożliwia wstępne oszacowanie wartości optymalnego opóźnienia w L_2 . Dzięki temu zakres poszukiwania dokładnej wartości optymalnego opóźnienia w L_2 można zawęzić do otoczenia wartości określonej w L_1 , co w znacznym stopniu pozwala skrócić czas obliczeń.

Reasumując, należy stwierdzić, że dla klasy sygnałów wejściowych ograniczonej warunkiem (2.18) istnieją zawsze jednoznaczne rozwiązania problemu filtracji rozplotowej w postaci odpowiedzi impulsowej o skończonym czasie trwania, optymalne w sensie normy w przestrzeniach L_1 i L_2 . Wyznaczenie tych odpowiedzi polega w zasadzie na rozwiązaniu pewnej liczby układów równań liniowych - w przypadku przestrzeni L_2 na ogół większej niż w przypadku L_1 .

Odmierna sytuacja zachodzi w przypadku klasy sygnałów $\{s(n)\}$ nie spełniających warunku (2.18). Dla takiej klasy sygnałów zagadnienie uzyskania odpowiedzi impulsowej filtru rozplotowego w L_1 nie jest w zasadzie rozpoznane, np. [197]. Przede wszystkim nie ma dowodu na to, że filtr ZFF zawsze realizuje minimum normy $\|g-\delta\|_1$. W klasie tej można wyróżnić taki podzbiór sygnałów $\{s(n)\}$, dla którego rozwiązanie w formie filtru ZFF nie istnieje, gdyż wyznacznik odpowiedniego układu równań liniowych przyjmuje wartość równą 0. Co więcej, w przypadku znacznie szerszego podzbioru sygnałów $\{s(n)\}$, dla których wspomniany powyżej wyznacznik przyjmuje wartości bliskie zera, zagadnienie wyznaczania odpowiedzi impulsowej jest źle uwarunkowane numerycznie. W przypadku przestrzeni L_2 rozwiązanie zagadnienia filtracji rozplotowej zawsze istnieje. Wynika to ze specyficznej własności macierzy korelacji R_{ss} w (3.16), która jest zawsze dodatnio określona. Tym niemniej, rozwiązanie w przestrzeni L_2 może być niejednoznaczne, a problem jego wyznaczenia źle uwarunkowany. Przykładem, dla którego nie istnieje jednoznaczne rozwiązanie w tej przestrzeni, może być sygnał $\{s(n)\}$ o dowolnej długości dany ciągiem $(1, -1, 1, -1, \dots, 1)$.

Reasumując, należy zauważyć, że w przypadku klasy sygnałów nie spełniających warunku (2.18) rozwiązanie optymalne zagadnienia filtracji rozplotowej w przestrzeni L_1 może nie istnieć, a warunki istnienia i jednoznaczności rozwiązania w tej przestrzeni nie są zbadane. W przestrzeni L_2 natomiast rozwiązanie istnieje zawsze, aczkolwiek może być niejednoznaczne, a zagadnienie jego otrzymania źle uwarunkowane.

W tym miejscu zostaje zakończona dyskusja poświęcona problemowi wyznaczenia odpowiedzi impulsowej o skończonej długości filtru rozplotowego, optymalnego w przestrzeniach L_1 i L_2 . Z własności norm definiujących wartość błędu aproksymacji w tych przestrzeniach wynika, że otrzymane rozwiązania minimalizują pewną uśrednioną miarę tego błędu w określonym przedziale. W pewnych zastosowaniach zachodzi jednak konieczność minimalizacji wartości błędu aproksymacji w każdym punkcie przedziału określoności funkcji aproksymowanej i aproksymującej. Miara tego rodzaju zdefiniowana jest przez normę w przestrzeni L_∞ , która jest równoważna normie maksymalnej Czebyszewa. Zagadnienie minimalizacji błędu aproksymacji w sensie tej normy jest nazywane problemem minimaksowym. Nie posiada on w ogólności rozwiązania analitycznego, znane są natomiast iteracyjne algorytmy rozwiązywania tego zagadnienia, np. [24]. Treścią kolejnych rozdziałów pracy jest analiza możliwości wyznaczenia rozwiązania odpowiedzi impulsowej filtru rozplotowego o skończonej długości odpowiedzi impulsowej, optymalnego w sensie minimum normy maksymalnej Czebyszewa.

4. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA FILTRACJI ROZPLOTOWEJ W SENSIE MINIMAKSOWEJ NORMY CZEBYSZEWA

4.1. Sformułowanie problemu filtracji rozplotowej w przestrzeni L_∞

Celem sformułowania problemu filtracji rozplotowej w przestrzeni L_∞ rozważmy sygnały: wejściowy $\{s(n)\}$ (2.10), sygnał wyjściowy $\{g(n)\}$ (3.3) oraz odpowiedź impulsową $\{h(n)\}$ (3.1). Dla ułatwienia analizy odpowiedź impulsową oraz sygnał wyjściowy normalizujemy względem $h(0)$ (patrz (3.1)) i przedstawiamy odpowiednio jako:

$$\{h(n)\} = \delta(n) + \sum_{\substack{i=-r \\ i \neq 0}}^u h(i) \cdot \delta(n-i), \quad (4.1)$$

$$\{g(n)\} = g(0) \cdot \delta(n) + \{\varepsilon(n)\}, \quad (4.2)$$

gdzie:

$$\{\varepsilon(n)\} = \sum_{\substack{i=-v \\ i \neq 0}}^w g(i) \cdot \delta(n-i).$$

Następnie normalizujemy sygnał wyjściowy $\{g(n)\}$ (4.2) względem jego listka głównego $g(0)$ i podstawiamy znormalizowany błąd aproksymacji $\{\varepsilon(n)\} \cdot g(0)^{-1}$ pod znak wartości bezwzględnej w zależności (3.7). Wówczas rozwiązanie zagadnienia filtracji rozplotowej w L_∞ sprowadza się do wyznaczenia $\{h(n)\}$ w taki sposób, żeby wartość błędu aproksymacji, którego miarą jest norma $\|g-\delta\|_\infty$, gdzie $g = g(i) \cdot g(0)^{-1}$, osiągnęła wartość minimalną, równą ε_∞ .

$$\varepsilon_\infty = \min_{\{h(n)\} \in H_m} \left\{ \lim_{p \rightarrow \infty} \left[\sum_{\substack{i=-v \\ i \neq 0}}^w \left| \frac{g(i)}{g(0)} \right|^p \right]^{\frac{1}{p}} \right\}, \quad (4.3)$$

gdzie H_m jest zbiorem wszystkich funkcji $\{h(n)\}$ o długości m , które przyjmują tożsamościowo wartość równą 0 dla $n = -(r+1), -(r+2), \dots$, oraz $n = u+1, u+2, \dots$, (patrz (3.2) i (4.1)).

Wykazuje się, że norma w przestrzeni L_∞ , jest równoważna normie maksymalnej Czebyszewa, np. [24], [43]. Dzięki temu można przedstawić (4.3) w następującej, równoważnej postaci:

$$\varepsilon_\infty = \min_{\{h(n)\} \in H_m} \left[\max_{i \neq 0} \left| \frac{g(i)}{g(0)} \right| \right]. \quad (4.4)$$

Ze względu na specyficzną postać zależności (4.4), zagadnienia minimalizacyjne w przestrzeni L_∞ noszą nazwę zagadnień minimaksowych. Tak ujęte zagadnienie wyznaczenia odpowiedzi impulsowej $\{h(n)\}$ w przestrzeni L_∞ nazwiemy więc minimaksowym zagadnieniem filtracji rozplotowej.

Metody, które umożliwiałyby otrzymanie analitycznego rozwiązania zagadnień minimaksowych nie są znane. Zagadnienia te rozwiązuje się więc metodami iteracyjnymi, często z użyciem programowania matematycznego. Całokształt zagadnień związany z rozwiązywaniem zagadnień minimaksowych metodami iteracyjnymi jest obszerny i znacznie wykracza poza ramy niniejszej pracy. Z tego powodu skupiono uwagę na algorytmie D zaproponowanym przez autora [61], [62], który dla ograniczonej klasy sygnałów umożliwia rozwiązanie na drodze analitycznej minimaksowego zagadnienia filtracji rozplotowej, zaś dla obszerniejszej klasy sygnałów - otrzymanie rozwiązania bliskiego minimaksowemu.

Z rozważań przeprowadzonych w kolejnych rozdziałach pracy wynika, że algorytm D pozwala na uzyskanie analitycznego rozwiązania minimaksowego problemu filtracji rozplotowej, jedynie dla pewnego zbioru sygnałów wejściowych $\{s(n)\}$, będącego podzbiorem sygnałów parzystych. Co więcej, z wyjątkiem szczególnego przypadku omówionego w rozdziale 5.3.1, tylko dla klasy sygnałów parzystych obowiązują twierdzenia, które umożliwiają uzyskanie analitycznych rozwiązań. Z tego względu dalsze rozważania dotyczące rozwiązania minimaksowego zagadnienia filtracji rozplotowej ograniczono do przypadku parzystych sygnałów wejściowych $\{s(n)\}$.

Mogłoby się pozornie wydawać, że ograniczenie rozpatrywanych sygnałów wejściowych do parzystych pozbawia dalsze rozważania praktycznego znaczenia. Tak jednak nie jest - w wielu praktycznych sytuacjach do opisu wielkości bądź zjawisk fizycznych wykorzystane są funkcje parzyste. Dla przykładu można wymienić sygnał wyjściowy filtra dopasowanego w systemach echolokacyjnych, w szczególności z kompresją impulsu. Jak wiadomo, sygnał taki jest funkcją autokorelacji odebranego echa, a więc funkcją parzystą. Filtracja rozplotowa pozwala w ogólnym przypadku na poprawę rozdzielczości otrzymanego obrazu, zaś np. w systemach radiolokacyjnych z kompresją impulsu służy do eliminacji listków bocznych sygnału na wyjściu filtra dopasowanego, które mogłyby sugerować wystąpienie fałszywych celów, np. [44], [60]. Również w teorii projektowania anten formalizm filtracji rozplotowej służy do minimalizacji poziomu listków bocznych charakterystyk kierunkowych, opisanych zazwyczaj funkcjami parzystymi [94].

Poza sygnałami $\{s(n)\}$, należącym do klasy sygnałów parzystych, algorytm D może być także wykorzystany do rozwiązania zagadnienia filtracji rozplotowej w przypadku bardziej ogólnej klasy tych sygnałów. Z idei tego algorytmu wynika, że pozwala on wyznaczyć odpowiedź impulsową filtra rozplotowego, dla której wartość normy $\|g-\delta\|_{\infty}$ jest mniejsza niż dla filtra ZFF. Kontrolne obliczenia dla pojedynczych przypadków sygnałów nie będących parzystymi potwierdziły tę własność. Dokładniejsze zbadanie algorytmu D w zastosowaniu do szerszej klasy sygnałów $\{s(n)\}$, z braku odpowiednich rezultatów o charakterze analitycznym wymagałoby przeprowadzenia znacznej ilości obliczeń numerycznych. Z poznawczego punktu widzenia jest to zagadnienie interesujące i oczekujące dalszych opracowań.

W nawiązaniu do (4.4) zauważamy, że minimaksowe zagadnienie filtracji rozplotowej ma charakter nieliniowy. W następnym rozdziale przedstawiono metodę linearyzacji zmiennych, która dla parzystych sygnałów $\{s(n)\}$ umożliwia przekształcenie tego zagadnienia w równoważny problem liniowy.

4.2. Linearyzacja problemu minimaksowego

Rozważania w niniejszym rozdziale rozpoczniemy od następującego twierdzenia.

Twierdzenie 1

Jeżeli sygnał wejściowy $\{s(n)\}$ jest funkcją parzystą, to minimum wartości błędu ε_{∞} , dane zależnością (4.4) jest osiągnięte wtedy i tylko wtedy, gdy poszukiwana odpowiedź impulsowa $\{h(n)\}$ jest również funkcją parzystą.

Dowód Twierdzenia 1 został podany w [60].

Na mocy Twierdzenia 1 oraz z własności splotu wynika, że funkcje $\{s(n)\}$, $\{h(n)\}$ oraz $\{g(n)\}$ zdefiniowane odpowiednio przez (2.10), (4.1) i (4.2) są w rozważanym przypadku funkcjami parzystymi. Celem ułatwienia dalszych rozważań upraszczamy zapis tych funkcji do następującej postaci:

$$\{s(n)\} = \delta(n) + \sum_{i=1}^q s_i \cdot [\delta(n-i) + \delta(n+i)] , \quad (4.5)$$

$$\{h_n(x)\} = \delta(n) + \sum_{i=1}^p x_i \cdot [\delta(n-i) + \delta(n+i)] , \quad (4.6)$$

$$\{g_n(x)\} = \{s(n)\} * \{h_n(x)\} = g_o(x) \cdot \delta(n) + \sum_{i=1}^{p+q} g_i \cdot [\delta(n-i) + \delta(n+i)] , \quad (4.7)$$

gdzie x jest zmienną p -wymiarową, reprezentowaną przez wektor wierszowy $x = [x_1, x_2, \dots, x_p]$.

Korzystając z (4.5), (4.6) i (4.7) wyrażenie (4.4) przedstawiamy jako

$$\varepsilon_\infty = \min_{\{h_n(x)\} \in H_{2p+1}} \left[\max_{n \neq 0} \left| \frac{g_n(x)}{g_o(x)} \right| \right] , \quad (4.8)$$

gdzie H_{2p+1} jest zbiorem wszystkich funkcji parzystych $\{h_n(x)\}$ o długości $2p+1$, przyjmujących tożsamościowo wartość 0 dla $n = (p+1), (p+2), \dots$.

Z zależności (4.5) do (4.7) wynika, że poszczególne elementy sygnału wyjściowego $\{g_n(x)\}$ są wielomianami pierwszego stopnia. W szczególności mamy:

$$g_o(x) = 1 + 2 \cdot \sum_{i=1}^k s_i \cdot x_i , \quad k = \min \{ p, q \} . \quad (4.9)$$

Wprowadźmy nowe zmienne z_i , zdefiniowane jako:

$$z_i = x_i \cdot \left[1 + 2 \cdot \sum_{j=1}^k s_j \cdot x_j \right]^{-1} , \quad i = 1, \dots, p . \quad (4.10)$$

Zauważmy, że wyrażenie w nawiasie zależności (4.10) jest iloczynem skalar-nym sygnału wejściowego $\{s(n)\}$ (4.5) i poszukiwanej odpowiedzi impulsowej $\{h_n(x)\}$ (4.6). Tak więc zmienne z_i zdefiniowane przez (4.10) istnieją pod warunkiem, że $\{s(n)\}$ i $\{h_n(x)\}$ nie są wzajemnie ortogonalne. Mnożąc wyrażenie (4.10) przez $2 \cdot x_i$, a potem sumując je od $i=1$ do $i=k$ otrzymujemy:

$$\left[1 + 2 \cdot \sum_{j=1}^k s_j \cdot x_j \right]^{-1} = 1 - 2 \cdot \sum_{j=1}^k s_j \cdot z_j . \quad (4.11)$$

Z (4.10) i (4.11) otrzymujemy:

$$x_i = z_i \cdot \left[1 - 2 \cdot \sum_{j=1}^k s_j \cdot z_j \right]^{-1} , \quad i = 1, \dots, p . \quad (4.12)$$

Przyjmując za zbiór indeksów N_0 ciąg liczb naturalnych od 1 do $p+q$, czyli

$$N_0 = \{ 1, 2, \dots, p+q \}, \quad (4.13)$$

z zależności (4.8), (4.9) i (4.10) wyznaczamy:

$$r_n(z) \equiv \frac{g_n(x)}{g_0(x)} = \sum_{i=1}^p a_{n,i} \cdot z_i - b_n, \quad n \in N_0, \quad (4.14)$$

co prowadzi do równania macierzewego o następującej postaci

$$A \cdot z^t = b^t, \quad (4.15)$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{p+q,1} & \dots & a_{p+q,p} \end{bmatrix}, \quad b^t = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_{p+q} \end{bmatrix}, \quad z^t = \begin{bmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_p \end{bmatrix}.$$

W wyrażeniu (4.15) wektor z jest zmienną, której elementy są zdefiniowane przez (4.10), zaś $a_{n,i}$ oraz b_n są liczbami rzeczywistymi. W rezultacie nieliniowy problem minimalizacyjny (4.8) sprowadza się do następującego liniowego zagadnienia minimaxowego (M).

(M). Należy wyznaczyć wektor $\hat{z} = [\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_p]$, dla którego

$$\min_z \max_{n \in N_0} |r_n(z)| \quad (4.16)$$

jest osiągnięte.

Z zależności (4.14), (4.15) i (4.16) wynika, że minimaksowe zagadnienie filtracji rozplotowej sprowadza się do wyznaczenia rozwiązania nadokreślonego, liniowego układu $p+q$ równań p niewiadomych, w sensie normy maksymalnej Czebyszewa. Dyskusję istnienia takiego rozwiązania oraz metodę de La Vallée Poussina jego wyznaczania przedstawiono poniżej.

4.3. Metoda de La Vallée Poussina

Rozwiązanie problemu minimaxowego (M) (patrz (4.16)) można otrzymać metodami iteracyjnymi przy założeniu, że spełniony jest warunek Haara [24]. W nawiązaniu do (4.15) warunek Haara oznacza, że dowolny podzbiór p wektorów wierszowych macierzy A jest liniowo niezależny. Warunek ten jest równoważny wymaganiu, żeby każdy minor rzędu p macierzy A był różny od zera.

Celem wyznaczenia rozwiązania problemu minimaxowego (M) (4.16) rozważmy następujący zbiór indeksów

$$N = \{ n_1, n_2, \dots, n_{p+1} \}, \quad n_1 < \dots < n_{p+1}, \quad (4.17)$$

będący podzbiorem zbioru N_0 , zdefiniowanego przez (4.13). Następnie rozpatrzmy następujący podzbiór

$$r_n(z), \quad n \in N, \quad (4.18)$$

zbioru funkcji zdefiniowanego przez (4.14). Wówczas, w nawiązaniu do (4.15) i (4.16) można sformułować następujące zagadnienie minimaxowe (\bar{M}) dla zbioru (4.17) i równań (4.18).

(\bar{M}). Należy wyznaczyć wektor $\bar{z} = [\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_p]$, dla którego

$$\min_z \max_{n \in \mathbb{N}} |r_n(z)| \quad (4.19)$$

jest osiągnięte.

Do wyznaczenia rozwiązania problemu minimaxowego (M) posłużymy się następującym twierdzeniem [24].

Twierdzenie 2

Każde rozwiązanie problemu (M) jest również rozwiązaniem problemu (\bar{M}) dla odpowiedniego podzbioru $r_n(z)$ (4.18).

Tak więc z tezy Twierdzenia 2 wynika, że wyznaczenie rozwiązania nadokreślonego, liniowego układu $p+q$ równań p niewiadomych, w sensie normy maksymalnej Czebyszewa, sprowadza się do rozwiązania odpowiedniego podukładu $p+1$ równań p niewiadomych.

Okazuje się, że zasadniczy problem w wyznaczeniu rozwiązania $p+q$ równań polega w tym przypadku na określeniu "odpowiedniego" podukładu $p+1$ równań. Załóżmy, że dla rozpatrywanego tu zagadnienia znamy taki "odpowiedni" podukład, który zgodnie z (4.15) jest określony macierzą \bar{A} i wektorem kolumnowym \bar{b}^t .

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a_{n_1,1} & \dots & a_{n_1,p} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n_{p+1},1} & \dots & a_{n_{p+1},p} \end{bmatrix}, \quad \bar{b}^t = \begin{bmatrix} b_{n_1} \\ \dots \\ b_{n_{p+1}} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Jedną z własności rozwiązania, w sensie normy maksymalnej Czebyszewa, nadokreślonego układu $p+1$ równań z p niewiadomymi jest specyficzna postać błędu aproksymacji, przyjmującego dla każdego z równań tę samą wartość, z dokładnością do znaku [24]. Tak więc, dla układu funkcji $r_n(z)$, zdefiniowanego przez (4.18), zagadnienie minimaxowe (\bar{M}) (4.19) można przedstawić w następującej formie:

$$r_n(z) = \pm \bar{\varepsilon}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.21)$$

gdzie $|\bar{\varepsilon}|$ jest wartością błędu aproksymacji.

Metoda de La Vallée Poussina użyta w niniejszej pracy, polega na wyznaczeniu sekwencji znaków po prawej stronie (4.21) dla wszystkich równań w pierwszej kolejności, a następnie wartości błędu $\bar{\varepsilon}$, jak również poszukiwanego rozwiązania w postaci wektora \bar{z} (4.19).

Celem wyznaczenia sekwencji znaków układu (4.21) zauważamy, że wektory wierszowe macierzy \bar{A} (4.20), zdefiniowane jako

$$\begin{aligned} \bar{A}_1 &= [a_{n_1,1} \quad a_{n_1,2} \quad \dots \quad a_{n_1,p}] \\ \bar{A}_2 &= [a_{n_2,1} \quad a_{n_2,2} \quad \dots \quad a_{n_2,p}] \\ &\dots \\ \bar{A}_{p+1} &= [a_{n_{p+1},1} \quad a_{n_{p+1},2} \quad \dots \quad a_{n_{p+1},p}] \end{aligned} \quad (4.22)$$

są liniowo zależne. Wynika to z faktu, że w przestrzeni p -wymiarowej może istnieć układ co najwyżej p wektorów liniowo niezależnych. Na mocy definicji liniowej zależności wektorów istnieje więc taki układ zmiennych λ_n , $n \in N$, że spełniona jest następująca równość:

$$\lambda_{n_1} \cdot \bar{A}_1 + \lambda_{n_2} \cdot \bar{A}_2 + \dots + \lambda_{n_{p+1}} \cdot \bar{A}_{p+1} = 0 \quad (4.23)$$

Przedstawmy układ zmiennych λ_n w równoważnej postaci wektora wierszowego

$$[\lambda] = [\lambda_{n_1}, \lambda_{n_2}, \dots, \lambda_{n_{p+1}}] \quad (4.24)$$

co na podstawie (4.20) pozwala zapisać równanie (4.23) w następującej postaci:

$$[\lambda] \cdot \bar{A} = 0 \quad (4.25)$$

Jest to układ p równań $p+1$ niewiadomych, a więc posiada nieskończenie wiele rozwiązań różniących się czynnikiem skalarnym. Z punktu widzenia naszych rozważań istotna jest sekwencja znaków zmiennych $\lambda_{n_1}, \dots, \lambda_{n_{p+1}}$, gdyż jest ona równa poszukiwanej sekwencji znaków po prawej stronie układu (4.21). Na mocy warunku Haara istnieje niezerowe rozwiązanie równania (4.25), (tzn. $\lambda_n \neq 0$ dla $n \in N$), z którego otrzymujemy poszukiwaną sekwencję znaków w równaniach (4.21), przedstawioną w postaci wektora wierszowego jako:

$$[\text{sgn } \lambda] = [\text{sgn } \lambda_{n_1}, \text{sgn } \lambda_{n_2}, \dots, \text{sgn } \lambda_{n_{p+1}}] \quad (4.26)$$

gdzie:

$$\text{sgn } x = \begin{cases} -1 & \text{dla } x < 0 \\ 1 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

Tak więc równanie (4.21) reprezentujące zagadnienie mininaksowe (\bar{M}), jest teraz dane w następującej postaci algebraicznej

$$r_n(z) = \bar{\varepsilon} \cdot \text{sgn } \lambda_n, \quad n \in N \quad (4.27)$$

co na podstawie (4.15) i (4.20) prowadzi do następującego układu $p+1$ równań liniowych $p+1$ niewiadomych:

$$\bar{A} \cdot z^t = \bar{b}^t + \bar{\varepsilon} \cdot [\text{sgn } \lambda]^t \quad (4.28)$$

W powyższym układzie równań niewiadomymi są elementy wektora z oraz $\bar{\varepsilon}$. Wykazuje się, że $\bar{\varepsilon}$ wyraża się następującym wzorem [24]:

$$\bar{\varepsilon} = - \frac{\sum_{n \in N} \lambda_n \cdot b_n}{\sum_{n \in N} |\lambda_n|} \quad (4.29)$$

Korzystając z tego, można podstawić (4.29) do (4.28) i rozwiązać dowolny podukład stopnia p układu (4.28), otrzymując również rozwiązanie równania (4.27). Taki sposób pozwala na zmniejszenie o 1 stopnia macierzy, którą należy odwrócić celem otrzymania jednoznacznego rozwiązania o postaci

$$\bar{z} = [\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_p] \quad (4.30)$$

Wartość błędu aproksymacji $|\bar{\varepsilon}|$ danego wzorem (4.29) jest wspólna dla wyrażeń (4.16) i (4.19), zaś wektor (4.30) jest jednoznacznym rozwiązaniem obydwu zagadnień minimaksowych, tj. (M) i (\bar{M}) . W rezultacie, następujący wektor $\bar{x} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p]$, którego składowe na mocy (4.12) są dane jako

$$\bar{x}_i = \bar{z}_i \cdot \left[1 - 2 \cdot \sum_{j=1}^k s_j \cdot \bar{z}_j \right]^{-1}, \quad i = 1, \dots, p, \quad (4.31)$$

jest jednoznacznym rozwiązaniem analizowanego tu minimaksowego zagadnienia filtracji rozplotowej i zgodnie z (4.6) określa poszukiwaną odpowiedź impulsową filtru rozplotowego. Jednocześnie wartość $|\bar{\varepsilon}|$ dana wzorem (4.29) jest minimalną wartością błędu aproksymacji w sensie normy maksymalnej Czebyszewa, równą ε_∞ , określoną przez (4.8).

Należy zauważyć, że powyższe rozwiązanie może być wyznaczone przy założeniu, że zachodzi następująca nierówność, (patrz (4.31)):

$$2 \cdot \sum_{j=1}^k s_j \cdot \bar{z}_j \neq 1. \quad (4.32)$$

Jeżeli (4.18) jest "odpowiednim" podzbiorem zbioru (4.14) wówczas zachodzi dodatkowo następująca nierówność:

$$\left| r_n(\bar{z}) \right| \leq |\bar{\varepsilon}|, \quad n \in N_0 \setminus N. \quad (4.33)$$

Jeżeli nierówność (4.33) nie jest spełniona, wówczas zbiór $r_n(z)$ dla $n \in N$ (4.18) nie jest "odpowiednim" podzbiorem zbioru $r_n(z)$ dla $n \in N_0$, realizującym problem minimaksowy (4.16)

Niestety, w ogólnym przypadku "odpowiedni" podzbiór $r_n(z)$ dla $n \in N$, należący do zbioru $r_n(z)$ dla $n \in N_0$ jest nieznanym, a jego wyznaczenie jest zazwyczaj głównym problemem w rozwiązywaniu zagadnienia minimaksowego (4.16). Do jego wyznaczenia używa się algorytmów iteracyjnych, w których liczba iteracji, poza efektywnością algorytmu, zależy przede wszystkim od trafności wyboru $p+1$ elementowego podzbioru ze zbioru funkcji $r_n(z)$ dla $n \in N_0$ w pierwszej iteracji [24], [25]. Im "bliższy" jest on poszukiwanemu zbiorowi $r_n(z)$ dla $n \in N$, realizującemu problem minimaksowy (\bar{M}) (4.19), tym mniejsza liczba iteracji potrzebna jest do otrzymania ostatecznego rozwiązania.

Tematem następnego rozdziału jest nieiteracyjny algorytm D, który umożliwia otrzymanie rozwiązania problemu filtracji rozplotowej sygnału, bliskiego rozwiązaniu minimaksowemu. Rozwiązanie to może być podstawą dobrego oszacowania rozwiązania minimaksowego, a odpowiadający mu podzbiór funkcji $r_n(z)$ dla $n \in N$ - punktem startowym algorytmu iteracyjnego. Dowodzi się również, że dla pewnej klasy sygnałów $\{s(n)\}$ algorytm D daje pożądane rozwiązanie minimaksowe.