

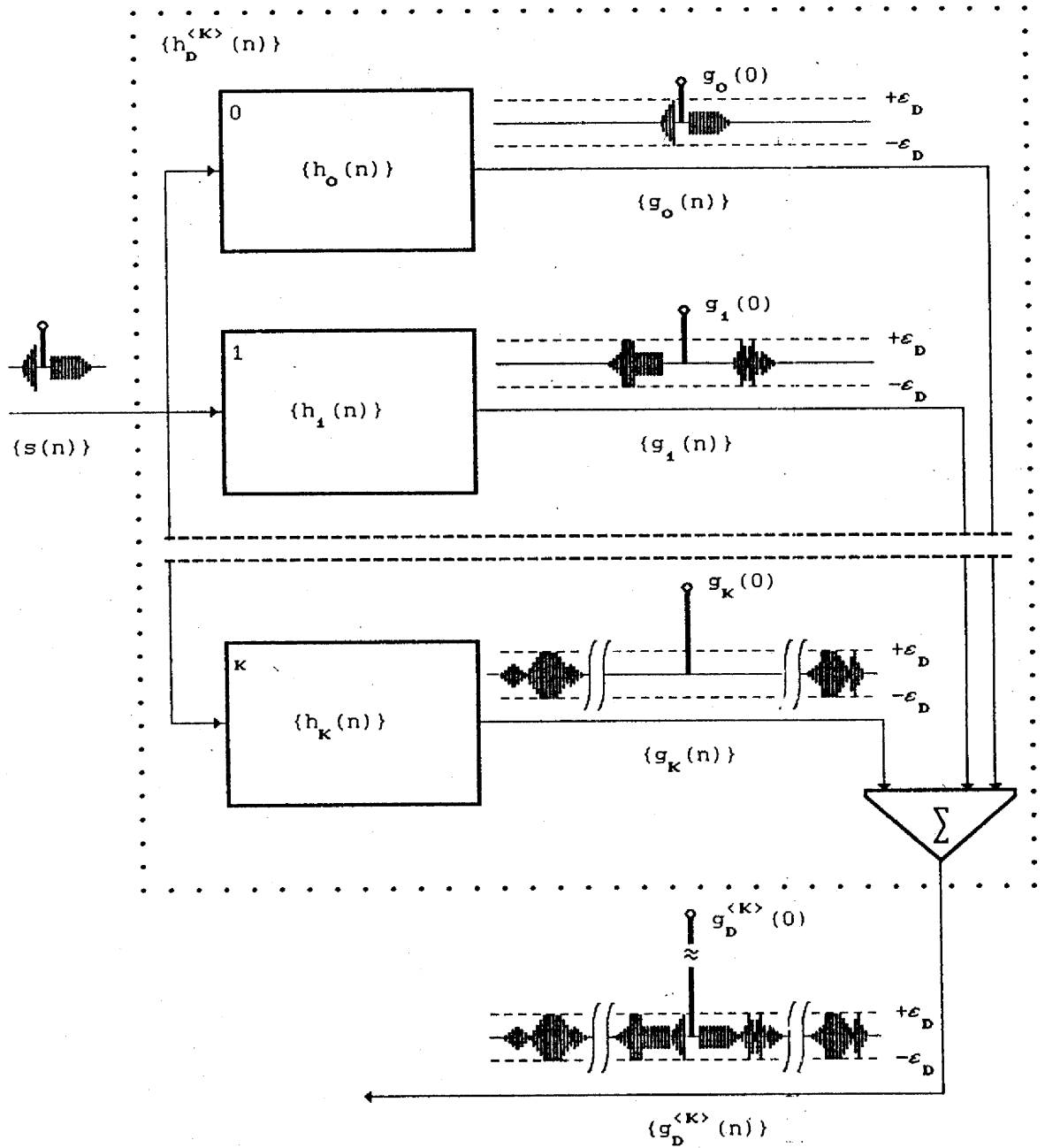
5. NIEITERACYJNY ALGORYTM ROZWIĄZYWANIA MINIMAKSOWEGO ZAGADNIENIA FILTRACJI ROZPLOTOWEJ

Celem niniejszego rozdziału jest przedstawienie zaproponowanego przez autora algorytmu D, który dla pewnej klasy sygnałów parzystych umożliwia otrzymanie w sposób analityczny rozwiązania minimaksowego problemu filtracji rozplotowej. Dla znacznie szerszej klasy sygnałów rozwiązanie otrzymane przy użyciu tego algorytmu może być użyte jako zbiór początkowy $r_n(z)$ dla $n \in \mathbb{N}$ w iteracyjnym procesie rozwiązywania problemu minimaksowego (\bar{M}) (4.19). Na początku niniejszego rozdziału opisano wspomniany powyżej algorytm D. Następnie przeanalizowano ograniczenia na zbiór sygnałów $\{s(n)\}$, dla których algorytm ten umożliwia otrzymanie poszukiwanego rozwiązania minimaksowego. Dodatkowo sformułowano kryterium (K) , które dla szerszej klasy sygnałów $\{s(n)\}$ umożliwia określenie początkowego zbioru funkcji $r_n(z)$, $n \in \mathbb{N}$, (4.18) dla algorytmu iteracyjnego. Kolejno, przeanalizowano właściwości algorytmu D dla sygnałów dwuelementowych oraz dla parzystych sygnałów trój-, pięcio- i siedmioelementowych. Pod pojęciem sygnału n -elementowego rozumie się tutaj sygnał dyskretny złożony z n próbek. Na zakończenie, dla określonego losowo zbioru parzystych sygnałów $\{s(n)\}$ porównano wielkości błędów aproksymacji, zdefiniowanych przez normy w przestrzeniach L_1 , L_2 , i L_∞ , oraz wyjściowy stosunek sygnału do szumu. Porównanie to przeprowadzono dla rozwiązań zagadnienia filtracji rozplotowej otrzymanych w przestrzeniach L_1 , L_2 , a także metodą obcięcia nieskończonego szeregu i przy użyciu algorytmu D.

5.1. Algorytm D i filtr D

Jak już stwierdzono, w ogólnym przypadku sygnału wejściowego $\{s(n)\}$ rozwiązanie minimaksowego problemu filtracji rozplotowej wymaga użycia algorytmu iteracyjnego. Przedstawiony poniżej nieiteracyjny algorytm D umożliwia otrzymanie rozwiązania bliskiego minimaksowemu, a w szczególnym przypadku parzystych sygnałów $\{s(n)\}$ – dokładnie minimaksowego [61], [62].

Jak pokazano na rys 4, idea algorytmu D polega na przyjęciu, że odpowiedź impulsowa $\{h_D^{(K)}(n)\}$ filtru reprezentowanego przez ten algorytm jest przedstawiona jako suma odpowiednio ważonych i przesuniętych na osi czasu składowych odpowiedzi impulsowych $\{h_0(n)\}$, $\{h_1(n)\}$, ..., $\{h_k(n)\}$. Każda z tych składowych o określonej długości reprezentuje sobą filtr ZFF. Warto przypomnieć (patrz rozdział 3), że przy zadanej długości odpowiedzi impulsowej i spełnionym warunku (2.18), filtr ZFF jest optymalnym rozwiązaniem zagadnienia filtracji rozplotowej w sensie minimalizacji normy błędu w przestrzeni L_1 .



Rys. 4. Schemat algorytmu D w postaci równoległej kombinacji filtrów ZFF

Niech i -ta składowa odpowiedź impulsowa filtru ZFF ma postać:

$$\left. \begin{aligned} \{h_0(n)\} &= h_0(0) \cdot \delta(n) , \quad \text{dla } i=0 , \\ \{h_i(n)\} &= h_i(0) \cdot \delta(n) + \sum_{\substack{j=-a_i \\ j \neq 0}}^{b_i} h_i(j) \cdot \delta(n-j) , \quad \text{dla } i=1, \dots, K. \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

Wówczas, dla ogólnego przypadku sygnału $\{s(n)\}$, zdefiniowanego przez (2.10), liczby naturalne a_i i b_i , określające długość odpowiedzi impulsowej $\{h_i(n)\}$ filtru ZFF dane są następująco [61]:

$$a_i + b_i = (p + q) \cdot 2^{i-1}, \quad \text{dla } i = 1, \dots, K. \quad (5.2)$$

Dla sygnałów parzystych $\{s(n)\}$ (4.5), na mocy Twierdzenia 1, (patrz rozdział 4.2), można wnioskować, że odpowiedzi impulsowe $\{h_i(n)\}$ są funkcjami parzystymi o postaci:

$$\left. \begin{aligned} \{h_0(n)\} &= h_0(0) \cdot \delta(n), \quad \text{dla } i=0, \\ \{h_i(n)\} &= h_i(0) \cdot \delta(n) + \sum_{j=1}^{a_i} h_i(j) \cdot [\delta(n-j) + \delta(n+j)], \quad \text{dla } i=1, \dots, K. \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

W tym przypadku liczba a_i , definiująca długość odpowiedzi impulsowej $\{h_i(n)\}$, wynosząca $1+2 \cdot a_i$, jest dana następująco [61]:

$$a_i = q \cdot i, \quad \text{dla } i = 1, \dots, K. \quad (5.4)$$

Wszystkie odpowiedzi impulsowe $\{h_i(n)\}$ są znormalizowane w taki sposób, że amplituda największego z listków bocznych w sygnałach wyjściowych $\{g_i(n)\}$, $i=0,1,\dots,K$, filtrów ZFF jest równa przyjętej wartości ε_D , a amplitudy wszystkich listków głównych $g_i(0)$ przyjmują wartość dodatnią (patrz rys. 4). Jednocześnie odpowiedzi impulsowe $\{h_i(n)\}$ są opóźnione w taki sposób, żeby listki główne sygnałów wyjściowych dodawały się. Dzięki temu amplituda listka głównego $g_D^{(K)}(0)$ sygnału $\{g_D^{(K)}(n)\}$ jest równa sumie amplitud listków głównych sygnałów wyjściowych filtrów ZFF, podczas gdy amplitudy największych z listków bocznych są równe ε_D . Z idei algorytmu D wynika, że w ogólnym przypadku w sygnale wyjściowym $\{g_D^{(K)}(n)\}$ wystąpi co najmniej $K+1$ listków bocznych o maksymalnej amplitudzie ε_D , zaś w szczególnym przypadku parzystych sygnałów wejściowych $\{s(n)\}$ - $2 \cdot (K+1)$. Tak określony filtr, opisany odpowiedzią impulsową $\{h_D^{(K)}(n)\}$ będzie nazywany filtrem D, zaś liczba K - jego rzędem. Rozwiązanie w postaci odpowiedzi impulsowej tego filtru można określić analitycznie poprzez wyznaczenie odpowiedzi impulsowych $\{h_i(n)\}$, $i=0,1,\dots,K$, filtrów składowych ZFF. Istotną własnością filtru D rzędu K jest to, że w porównaniu z filtrem ZFF opisany odpowiedzią impulsową $\{h_K(n)\}$ o tej samej długości (patrz rys. 4), pozwala na uzyskanie mniejszej wartości błędu aproksymacji zdefiniowanego normą $\|g-\delta\|_\infty$. W tym sensie rozwiązanie dane filtrem D jest bliższe minimaxowemu niż rozwiązanie w postaci filtru ZFF. Tak więc filtr D jest dobrym przybliżeniem rozwiązania minimaxowego problemu filtracji rozplotowej, a odpowiadający mu zbiór funkcji $r_n(z)$ dla $n \in \mathbb{N}$ stanowi dobry punkt startowy algorytmu iteracyjnego (patrz rozdział 4.3).

Następny rozdział pracy dotyczy kryterium (K) , które na podstawie rozwiązania w postaci filtru D, daje możliwość otrzymania poszukiwanego rozwiązania minimaxowego w jednej iteracji. Określona zostanie również klasa sygnałów wejściowych $\{s(n)\}$, dla której rozwiązanie dane filtrem D może być poszukiwanym rozwiązaniem minimaxowego problemu filtracji rozplotowej.

5.2. Kryterium $\langle K \rangle$ wyboru zbioru funkcji realizującego rozwiązanie minimaksowe

Chociaż przedstawiony w poprzednim rozdziale algorytm D, z wyjątkiem warunku (2.18), nie wymagał ograniczeń na klasę sygnałów wejściowych $\{s(n)\}$, dalsze rozważania ograniczymy do klasy sygnałów parzystych, (por. rozdział 4). Zauważmy, że dla filtru D rzędu K długość odpowiedzi impulsowej $\{h_D^{(K)}(n)\}$ przyjmuje określone wartości wynikające ze wzoru (5.4). W takim przypadku zbiór indeksów zdefiniowany przez (4.13) przybiera następującą postać:

$$N_0 = \{ 1, 2, \dots, q \cdot (K+1) \} . \quad (5.5)$$

Sygnał wyjściowy filtru D rzędu K można więc zapisać jako

$$\{g_D^{(K)}(n)\} = \delta(n) \cdot g_D^{(K)}(0) + \sum_{j=1}^{q \cdot (K+1)} g_D^{(K)}(j) \cdot [\delta(n-j) + \delta(n+j)] . \quad (5.6)$$

Na podstawie (5.5) oraz (5.6) sformułujemy kryterium $\langle K \rangle$ wyboru "odpowiedniego" podzbioru (4.18) zbioru funkcji $r_n(z)$ (4.14), [62].

Kryterium $\langle K \rangle$

Dany jest sygnał wyjściowy $\{g_D^{(K)}(n)\}$ filtru D. Za "odpowiedni" podzbiór indeksów N zbioru N_0 należy przyjąć $q \cdot K + 1$ - elementowy zbiór taki, że każda z liczb, określona wartością bezwzględną,

$$\left| g_D^{(K)}(n) \right| , \quad n \in N , \quad (5.7)$$

jest większa od każdej z następujących liczb,

$$\left| g_D^{(K)}(n) \right| , \quad n \in N_0 \setminus N . \quad (5.8)$$

Inaczej mówiąc, wg kryterium $\langle K \rangle$ "odpowiedni" zbiór N może być określony przez zbiór indeksów odpowiadający $q \cdot K + 1$ listkom bocznym o największej amplitudzie w sygnale wyjściowym filtru D.

Analizując kryterium $\langle K \rangle$, musimy wziąć pod uwagę dwa przypadki określone następującymi warunkami:

$\langle C_1 \rangle$ - Nie wszystkie liczby dane wartością bezwzględną (5.7) są równe.

$\langle C_2 \rangle$ - Wszystkie liczby dane wartością bezwzględną (5.7) są równe.

Ad $\langle C_1 \rangle$. Zachodzi następująca nierówność:

$$\max_{n \neq 0} \left[\left| \frac{g_D^{(K)}(n)}{g_D^{(K)}(0)} \right| \right] = \left| \frac{\varepsilon_D}{g_D^{(K)}(0)} \right| > |\bar{\varepsilon}| , \quad (5.9)$$

gdzie $\bar{\varepsilon}$ jest dane przez (4.29).

Rozwiązanie reprezentowane przez filtr D jest tu przybliżeniem poszukiwanego rozwiązania minimaksowego. Jednocześnie, dla rozwiązania danego filtrem D, wartość błędu aproksymacji w sensie normy $\|g - \delta\|_\infty$, określona w (5.9) jako $|\varepsilon_D| \cdot |g_D^{(K)}(0)|^{-1}$, jest pewnym oszacowaniem od góry minimalnej wartoś-

ci błędu wg tej normy. Celem otrzymania rozwiązania minimaxowego korzystamy z kryterium $\langle K \rangle$ do określenia $(q \cdot K + 1)$ -elementowego, zbioru funkcji $r_n(z)$ dla $n \in \mathbb{N}$. Następnie postępujemy zgodnie z metodą de La Vallée Poussina przedstawioną w rozdziale 4.3, tzn. rozwiązujemy układ równań (4.28), otrzymując w ten sposób rozwiązanie (4.30). Jeżeli spełnione są warunki (4.32) i (4.33), to wektor \bar{z} jest jednoznacznym rozwiązaniem, wspólnym dla problemów minimaxowych $\langle M \rangle$ (4.16) i $\langle \bar{M} \rangle$ (4.19). Konsekwentnie, wartość $|\bar{\varepsilon}|$, będąca wartością wspólną dla (4.16) i (4.19) jest minimalną wartością błędu w sensie normy $\|g - \delta\|_\infty$ wynoszącą ε_∞ , zdefiniowaną przez (4.4). Jeżeli warunek (4.33) nie jest spełniony, wówczas kryterium $\langle K \rangle$ zawodzi. W takim przypadku, celem otrzymania rozwiązania minimaxowego należy zmodyfikować to kryterium lub skorzystać z innych procedur iteracyjnych, np. [24].

Ad $\langle C_2 \rangle$. Możliwe są tutaj dwa przypadki:

a) - Zachodzi nierówność (5.9). W tym przypadku obowiązuje identyczny sposób postępowania, jak w punkcie 1.

b) - Zachodzi następująca równość:

$$\max_{n \neq 0} \left[\left| \frac{g_D^{\langle K \rangle}(n)}{g_D^{\langle K \rangle}(0)} \right| \right] = \left| \frac{\varepsilon_D}{g_D^{\langle K \rangle}(0)} \right| = |\bar{\varepsilon}|. \quad (5.10)$$

W tym przypadku rozwiązanie dane filtrem D jest poszukiwanym rozwiązaniem minimaxowego zagadnienia filtracji rozplotowej. Jak już stwierdzono w rozdziale 4, błąd aproksymacji w sensie normy maksymalnej Czebyszewa dla układu $p+1$ równań z p niewiadomymi przyjmuje postać $p+1$ odchyłek o jednakowych wartościach i różnych znakach. W przypadku filtru rozplotowego odchyłki te reprezentowane są przez amplitudy listków bocznych sygnału wyjściowego. Z idei algorytmu D wynika, że dla przypadku parzystych sygnałów wejściowych $\{s(n)\}$, posiadających $2 \cdot q$ symetrycznie położonych listków bocznych o jednakowych amplitudach, w sygnale wyjściowym filtru D rzędu 1 występuje $2 \cdot q + 2$ symetrycznie położonych listków bocznych. Inaczej mówiąc, sygnał wyjściowy takiego filtru spełnia warunek konieczny na to, żeby rozwiązanie, które przedstawia jego odpowiedź impulsowa, było poszukiwanym rozwiązaniem minimaxowym. Stąd możemy wnioskować, że w przypadku parzystych sygnałów wejściowych $\{s(n)\}$, których wszystkie listki boczne mają taką samą amplitudę, filtr D rzędu 1 może być rozwiązaniem minimaxowego zagadnienia filtracji rozplotowej. Bardziej szczegółowa analiza tego przypadku została przeprowadzona w [62] i [63], a jej wyniki zostaną przytoczone w następnych rozdziałach pracy.

5.3. Rozwiązanie problemu filtracji rozplotowej przy użyciu algorytmu D

Nadrzędnym celem niniejszej pracy jest aproksymacja nieskończonej odpowiedzi impulsowej idealnego filtra rozplotowego ciągiem skończonym. Jakość tej aproksymacji określa miara błędu aproksymacji, a problem filtracji polega na wyznaczeniu skończonej odpowiedzi impulsowej filtra w taki sposób, żeby miara ta przyjmowała wielkość minimalną. Jednocześnie pojęcia "filtr" czy też "filtracja" w sposób nierozłączny kojarzą się z szumem towarzyszącym wszystkim zjawiskom fizycznym. Z tego względu każdy filtr (niezależnie od tego, jakie jest jego nadrzędne zadanie), który nie posiada zdolności wyróżniania pożądanego sygnału na tle szumów, ma niewielkie znaczenie praktyczne. Najczęściej używaną miarą zdolności filtra do wyróżniania pożądanego sygnału na tle szumu jest stosunek sygnału do szumu. W klasie układów liniowych "najlepszym" filtrem w tym względzie, tzn. zapewniającym maksymalną wartość wyjściowego stosunku sygnału do szumu, jest filtr dopasowany, np. [248]. W tym kontekście szczególnie wygodny sposób określenia zdolności dowolnego filtra liniowego do wyróżniania sygnału na tle szumu polega na porównaniu go z filtrem dopasowanym. Oczywiście, w przypadku każdego filtra liniowego stosunek sygnału do szumu będzie mniejszy niż dla filtra dopasowanego, co można interpretować jako pewnego rodzaju "stratę". W Dodatku A zdefiniowano i wyprowadzono wyrażenie na wartość wyjściowego stosunku sygnału do szumu dla dowolnego filtra liniowego, znormalizowaną względem wartości tego stosunku dla filtra dopasowanego. Tak znormalizowany, wyjściowy stosunek sygnału do szumu wyraża podaną w decybelach "stratę" jaką ponosimy stosując rozpatrywany filtr liniowy zamiast dopasowanego. Z punktu widzenia głównego celu niniejszej pracy, rekompensatą za poniesioną "stratę" jest "zysk", tym większy im wartość błędu aproksymacji jest bliższa zera. Tak więc bilans "zysku" i "straty", który prawie zawsze ma charakter pewnej relacji wymiennej (ang. tradeoff), pozwala na pełniejszą ocenę przydatności praktycznej otrzymanych rozwiązań.

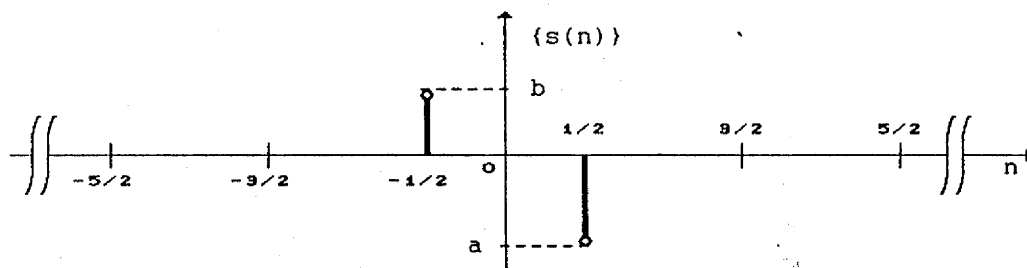
Celem niniejszego rozdziału jest przedstawienie wyników rozwiązania minimaxowego problemu filtracji rozplotowej z użyciem algorytmu D dla sygnałów dwuelementowych oraz parzystych sygnałów trój-, pięcio-, i siedmioelementowych. Prezentacji tej towarzyszy dyskusja dotycząca wspomnianych powyżej relacji wymiennych pomiędzy wartościami błędu aproksymacji i wyjściowego stosunku sygnału do szumu.

5.3.1. Sygnał dwuelementowy

W niniejszym rozdziale omówiono rezultaty rozwiązania minimaxowego zagadnienia filtracji rozplotowej względem dwuelementowego sygnału wejściowego $\{s(n)\}$ o postaci:

$$\{s(n)\} = a \cdot \delta(n - \frac{1}{2}) + b \cdot \delta(n + \frac{1}{2}), \quad (5.11)$$

gdzie a , b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi różnymi od zera.

Rys. 5. Przykład dwuelementowego sygnału wejściowego $\{s(n)\}$

Zdefiniujmy odpowiedź impulsową filtra rzędu K , będącego rozwiązaniem minimaxowego problemu filtracji rozplotowej względem sygnału zdefiniowanego przez (5.11), jako:

$$\{h_K(n)\} = \sum_{i=-K+1}^K h_K(i-\frac{1}{2}) \cdot \delta(n-i+\frac{1}{2}), \quad K=1,2,\dots \quad (5.12)$$

Rząd filtra K określa tutaj długość jego odpowiedzi impulsowej wynoszącą $2 \cdot K$. Na podstawie rozdziałów (4.2) i (4.3) oraz prac [60], [62], [63], [250] odpowiedź impulsową $\{h_K(n)\}$ zdefiniowaną wzorem (5.11) można przedstawić w następującej postaci [84],

$$\{h_K(n)\} = \{h^M(n)\} * \{h_{K-1}^H(n)\}, \quad (5.13)$$

gdzie:

$\{h^M(n)\}$ - jest odpowiedzią impulsową filtra dopasowanego do sygnału wejściowego $\{s(n)\}$, określonego przez (5.11),

$\{h_{K-1}^H(n)\}$ - jest odpowiedzią impulsową filtra D, rzędu $K-1$, będącego rozwiązaniem minimaxowego problemu filtracji rozplotowej względem trójelementowego sygnału parzystego, spełniającego warunek (2.18).

Sygnał $\{h_{K-1}^H(n)\}$ ma charakterystyczną postać funkcji autokorelacji sekwencji Huffmana, wykorzystywanych w technice kompresji impulsu. Warunki istnienia oraz analityczne rozwiązanie $\{h_{K-1}^H(n)\}$ podano m.in. w [60], [63], [78] i [250]. Zostaną one pokrótce omówione w następnym rozdziale pracy. Z punktu widzenia problemu dyskutowanego w niniejszym rozdziale istotną okolicznością jest to, że dla sygnału $\{s(n)\}$, zdefiniowanego przez (5.11) zawsze istnieje jednoznaczne rozwiązanie $\{h_{K-1}^H(n)\}$, dla $K=1,2,\dots$.

Odpowiedź impulsową $\{h^M(n)\}$ filtra dopasowanego do sygnału $\{s(n)\}$ danego przez (5.11) można przedstawić jako:

$$\{h^M(n)\} = b \cdot \delta(n-\frac{1}{2}) + a \cdot \delta(n+\frac{1}{2}). \quad (5.14)$$

Odpowiedzią tego filtra na pobudzenie sygnałem $\{s(n)\}$ (5.11) jest funkcja autokorelacji tego sygnału, która po normalizacji względem jego energii jest dana jako,

$$\{\phi(n)\} = \delta(n) + \frac{\alpha}{2} \cdot [\delta(n-1) + \delta(n+1)], \quad (5.15)$$

gdzie:

$$\alpha \equiv \frac{2ab}{a^2 + b^2}$$

Współczynnik α może być interpretowany jako pewna miara "równości" elementów o amplitudzie a i b w sygnale wejściowym $\{s(n)\}$ (5.11). Przyjmuje on wartość 1 lub -1 odpowiednio dla $a=b$ oraz $a=-b$. Dla $|a| \neq |b|$ mamy $|\alpha| < 1$. Stąd mamy

$$|\alpha| \leq 1. \quad (5.16)$$

W pracach [60], [63], [78] i [250], jak również w rozdziale 5.3.2 wykazano, że przy spełnionym warunku (5.16) istnieje jednoznaczne rozwiązanie $\{h_{K-1}^H(n)\}$, $K=1,2,\dots$, dane w postaci analitycznej, reprezentujące filtr D rzędu $K-1$. Wraz z (5.14) implikuje to istnienie jednoznacznego rozwiązania w postaci poszukiwanej odpowiedzi impulsowej, zdefiniowanej przez (5.12)

Ostatecznie, na mocy (5.13) i (5.14) poszukiwana odpowiedź impulsowa filtru będącego rozwiązaniem minimaxowego problemu filtracji rozplotowej względem sygnału $\{s(n)\}$ (5.11) wynosi:

$$\{h_K(n)\} = a \cdot \{h_{K-1}^H(n)\} + b \cdot \{h_{K-1}^H(n-1)\}. \quad (5.17)$$

Określając współczynnik α , (5.15) można wyznaczyć $\{h_{K-1}^H(n)\}$, przy użyciu jednej z metod podanych w [60], a następnie obliczyć $\{h_K(n)\}$ na podstawie zależności (5.17).

Szczególny przypadek zachodzi dla sygnału wejściowego $\{s(n)\}$ spełniającego warunek $\left|\frac{b}{a}\right|=1$, tzn. dla $|\alpha|=1$. W szczególności, dla $a=b=1$ oraz $a=1, b=-1$ sygnał wejściowy $\{s(n)\}$ ma specyficzną postać parzystej lub nieparzystej pary impulsów, o widmie odpowiednio kosinusoidalnym lub sinusoidalnym. W takim przypadku odpowiedź impulsowa $\{h_K(n)\}$ (5.17) może być wyznaczona w sposób rekurencyjny, jak przedstawiono w Tablicy 3.

Tablica 3

K	$\{h_K(n)\}$	
	$a = b = 1$ parzysta para impulsów	$a = 1, b = -1$ nieparzysta para impulsów
1	{1, 1}	{-1, 1}
2	{-1, 2, 2, -1}	{-1, -2, 2, 1}
3	{1, -2, 3, 3, -2, 1}	{-1, -2, -3, 3, 2, 1}
4	{-1, 2, -3, 4, 4, -3, 2, -1}	{-1, -2, -3, -4, 4, 3, 2, 1}
	i. t. d.	

Celem przeanalizowania wspomnianych na wstępie niniejszego rozdziału relacji wymiennych pomiędzy minimalną wartością błędu aproksymacji ε_∞ i znormalizowanym wyjściowym stosunkiem sygnału do szumu $(S/N)_0$, (patrz Dodatek A), rozważmy zależności analityczne wynikające z opracowań przedstawionych w [60], [63], [78] i [250].

Na podstawie (5.13) oraz wyników z [60], minimalna wartość błędu aproksymacji ε_∞ w sensie normy $\|g-\delta\|_\infty$ dla filtru rzędu K , określonego odpowiedzią impulsową (5.17), wynosi [84]:

$$\varepsilon_\infty = \left[2 \cdot \sum_{i=1}^K |T_i(1/\alpha)| \right]^{-1}, \quad (5.18)$$

gdzie $T(i)$ jest i -tym wielomianem Czebyszewa pierwszego rodzaju.

W przypadku $|\alpha| = 1$, tzn. dla parzystej lub nieparzystej pary impulsów, (5.18) upraszcza się do następującej postaci:

$$\varepsilon_\infty = (2 \cdot K)^{-1}. \quad (5.19)$$

W ogólnym przypadku, wyrażenie analityczne wartości znormalizowanego, wyjściowego stosunku sygnału do szumu $(S/N)_o$ jest bardzo złożone i znacznie wygodniej jest posłużyć się definicją (A.19), (patrz Dodatek A). W przypadku granicznego sygnału $\{s(n)\}$, dla którego spełniony jest warunek $|\alpha| = 1$, wyrażenie na $(S/N)_o$ przybiera następującą postać [84]:

$$(S/N)_o = 10 \log \frac{6(K+1)}{(K+2)(2K+3)}, \quad [\text{dB}], \quad K = 2, 3, \dots \quad (5.20)$$

Szczególnie interesująca jest wartość tego stosunku dla "długich" filtrów pozwalających uzyskać dowolnie mały błąd aproksymacji. Na podstawie [250] można wykazać, że [84]

$$\lim_{K \rightarrow \infty} (S/N)_o = 10 \log (1-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}, \quad [\text{dB}], \quad \text{dla } |\alpha| < 1. \quad (5.21)$$

Konsekwentnie z (5.20) wynika, że

$$\lim_{K \rightarrow \infty} (S/N)_o = -\infty, \quad \text{dla } |\alpha| = 1. \quad (5.22)$$

Rezultaty dane zależnościami od (5.18) do (5.22) można zreasumować w następujący sposób. W przypadku sygnału wejściowego $\{s(n)\}$, złożonego z dwóch impulsów o różnych amplitudach, wartość minimalnego błędu aproksymacji ε_∞ (5.18) zmniejsza się monotonicznie wraz ze wzrostem długości odpowiedzi impulsowej filtru K , podczas gdy wartość $(S/N)_o$ (5.21) zmierza asymptotycznie do swojego kresu dolnego. Im mniejsza jest wartość $|\alpha|$, tym mniejszy jest błąd aproksymacji oraz korzystniejsza wartość $(S/N)_o$ przy danej długości K . W granicznym przypadku sygnału $\{s(n)\}$ o jednakowych amplitudach, $|\alpha|=1$, wartość ε_∞ (5.19) również maleje monotonicznie ze wzrostem K , zaś wartość $(S/N)_o$ jest nieograniczona (5.20), (5.22). Oznacza to, że "długi" filtr, pozwalający uzyskać zadowalająco mały błąd aproksymacji, może być w tym przypadku rozwiązaniem nie do przyjęcia, ze względu na niedopuszczalne w praktyce pogorszenie wyjściowego stosunku sygnału do szumu.

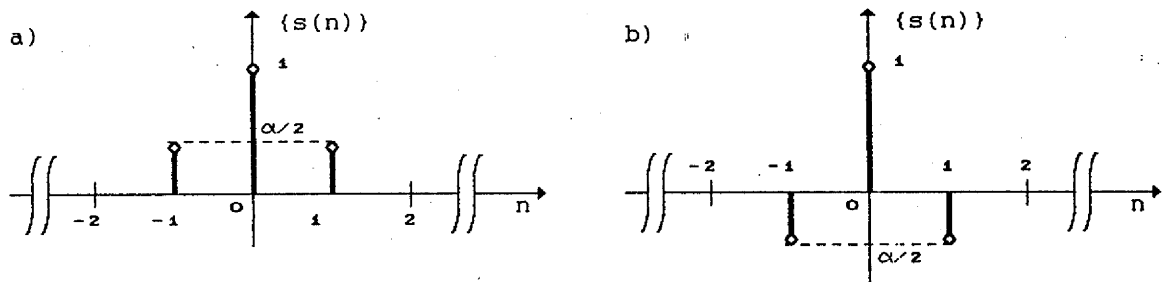
Przedstawione powyżej rozwiązanie minimaxowego problemu filtracji rozplotowej względem sygnału $\{s(n)\}$ (5.11), dane odpowiedzią impulsową (5.17), jest jedynym znanym autorowi przypadkiem, w którym dla tego sygnału, nie będącego funkcją parzystą, istnieje rozwiązanie analityczne. W następnych rozdziałach pracy przedstawiono i przedyskutowano istnienie analitycznego rozwiązania tego problemu dla pewnych sygnałów parzystych.

5.3.2. Trójelementowy sygnał parzysty

W niniejszym rozdziale przedyskutowano warunki istnienia oraz jednoznaczność rozwiązania minimaxowego problemu filtracji rozplotowej względem trójelementowych sygnałów parzystych $\{s(n)\}$ o następującej postaci:

$$\{s(n)\} = \delta(n) + \frac{\alpha}{2} \cdot [\delta(n-1) + \delta(n+1)], \quad (5.23)$$

gdzie α jest dowolną liczbą rzeczywistą, różną od zera (por. (5.15)). Postać taką przyjmuje funkcja autokorelacji pewnej klasy sygnałów szeroko-pasmowych, wykorzystywanych w echolokacji, zwanych sekwencjami Huffmana [60].



Rys. 6. Trójelementowy, parzysty sygnał wejściowy $\{s(n)\}$,

- a - z "dodatnimi" listkami bocznymi,
b - z "ujemnymi" listkami bocznymi.

Dyskutowany w tym rozdziale problem jest obszernie omówiony w opublikowanych pracach autora [60], [63], [69], [70], [78], [250]. Z tego powodu przytoczono poniżej w formie syntetycznej tylko bardziej znaczące wyniki wymienionych prac.

Na mocy Twierdzenia 1 (patrz rozdział 4.2) odpowiedź impulsowa filtru, będącego rozwiązaniem minimaxowego problemu filtracji rozplotowej względem sygnału $\{s(n)\}$ o postaci (5.23) (patrz rys. 6), jest funkcją parzystą zdefiniowaną jako:

$$\left. \begin{aligned} \{h_0(n)\} &= h_0(0) \cdot \delta(n) , \\ \{h_k(n)\} &= h_k(0) \cdot \delta(n) + \sum_{i=1}^K h_k(i) \cdot [\delta(n-i) + \delta(n+i)] , \end{aligned} \right\} \quad (5.24)$$

gdzie $K=0,1,\dots$, jest rzędem filtru.

Z punktu widzenia istnienia odpowiedzi impulsowej (5.24) sygnały $\{s(n)\}$ należy podzielić na dwa następujące podzbiory:

1. - Sygnały $\{s(n)\}$, dla których

$$|\alpha| \leq 1 . \quad (5.25)$$

2. - Sygnały $\{s(n)\}$, dla których

$$|\alpha| > 1 . \quad (5.26)$$

Powyższy podział jest konsekwencją warunku (2.18) (patrz rozdział 2).

Ad 1. Dla sygnałów spełniających warunek (5.25) prawdziwe są następujące stwierdzenia:

- Istnieje zawsze jednoznaczne rozwiązanie minimaxowego problemu filtracji rozplotowej dane odpowiedzią impulsową (5.24) dla $K=0,1,2,\dots$
- Rozwiązaniem tym jest filtr D rzędu K otrzymany na podstawie algorytmu D.
- Istnieje rekurencyjny wzór na elementy odpowiedzi impulsowej $h_k(n)$ o następującej postaci [60]:

$$\left. \begin{aligned} h_k(i) &= p_i / p_0, & \text{dla } i &= 1, \dots, K, \\ p_k &= 2/\alpha, & p_{k-1} &= -2p_k/\alpha - 2e_k/\alpha, \dots \\ p_i &= -2p_{i+1}/\alpha - p_{i+2} - 2e_{i+1}/\alpha, & \text{dla } i &= K-2, \dots, 1, 0, \\ \text{gdzie: } e_i &= [\text{sgn}(-\alpha)]^{K-i+1} \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

- Dla przypadku granicznego $|\alpha| = 1$, odpowiedź impulsowa jest dana następującym wzorem [60]:

$$\{h_k(n)\} = 1/2 \cdot \sum_{i=-K}^K (-\text{sgn } \alpha)^{|i|} \cdot (K-|i|+1) \cdot (K-|i|+2) \cdot \delta(n-i) \quad (5.28)$$

- Wartość błędu aproksymacji ε_∞ wynosi [60], [250]:

$$\varepsilon_\infty = 2 \cdot \sum_{i=1}^{K+1} |T_i(1/\alpha)| \quad (5.29)$$

- Dla przypadku granicznego $|\alpha| = 1$, wyjściowy znormalizowany stosunek sygnału do szumu $(S/N)_0$ wynosi [60], [250]:

$$(S/N)_0 = 10 \log \left\{ \frac{40 \cdot (K+1)}{K+3 \cdot (3K^3 + 15K^2 + 28K + 20)} \right\}, \text{ [dB]} \quad (5.30)$$

- Graniczne wartości znormalizowanego stosunku sygnału do szumu, przy $K \rightarrow \infty$ wynoszą odpowiednio:

$$\lim_{K \rightarrow \infty} (S/N)_0 = 10 \log \frac{(1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{1+\alpha^2/2}, \text{ [dB]}, \text{ dla } |\alpha| < 1, \quad (5.31)$$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} (S/N)_0 = -\infty, \text{ dla } |\alpha| = 1. \quad (5.32)$$

Ad 2. Dla sygnałów $\{s(n)\}$ spełniających warunek (5.26) rozwiązanie minimaxowego problemu filtracji rozplotowej również istnieje, z wykluczeniem tych sygnałów, dla których α przyjmuje pewne specyficzne wartości. Im wyższy rząd filtru K , tym większa liczba tych wartości α , dla których wspomniane powyżej rozwiązanie nie istnieje. I tak np. rozwiązanie istnieje pod warunkiem, że

$$\alpha \neq \pm \frac{2}{3} \sqrt{3}, \quad \alpha \neq \pm \sqrt{2}, \quad \alpha \neq \pm 2, \quad \text{dla } K = 1,$$

$$\alpha \neq \pm \frac{2}{3} \sqrt{3}, \quad \alpha \neq \pm \sqrt{2}, \quad \alpha \neq \pm 2, \quad \text{dla } K = 2.$$

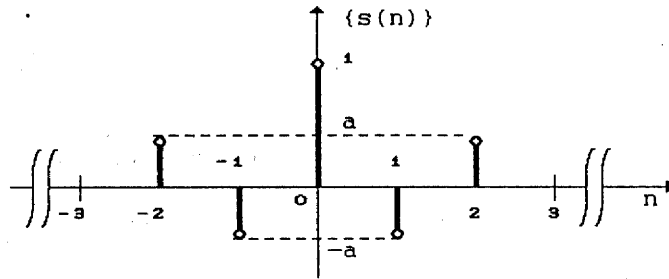
Na podstawie [250], dla filtru dowolnego rzędu K można wyznaczyć zbiór wszystkich wartości α , dla których rozwiązanie minimaxowego problemu filtracji rozplotowej nie istnieje. Wyznaczenie tego zbioru wymaga żmudnych obliczeń, szczególnie w przypadku filtru wysokiego rzędu. Łatwiejszy sposób polega na użyciu odpowiedniego kryterium, pozwalającego sprawdzić, czy dla danego rzędu filtru K i określonej wartości α istnieje rozwiązanie. Problem ten wraz z przykładem ilustracyjnym przedstawiono w [63, (Appendix A)].

Reasumując rozważania przedstawione w niniejszym rozdziale należy przede wszystkim zauważyć, że odpowiedź impulsowa filtru rozplotowego względem sygnału $\{s(n)\}$ (5.23), określona wzorami (5.27) i (5.28), jest jednym z dwóch znanych autorowi przypadków, w których rozwiązanie dane filtrem D dowolnego rzędu K jest analitycznym rozwiązaniem minimaxowego problemu filtracji rozplotowej. Drugi z tych przypadków występuje dla sygnału dwuelementowego, przedstawionego w rozdziale 5.3.1. Jest również ważne, że dla sygnałów $\{s(n)\}$ (5.23) spełniających warunek $|\alpha| < 1$, równoważny warunkowi (2.18), wartość znormalizowanego, wyjściowego stosunku sygnału do szumu $(S/N)_o$ jest w najgorszym przypadku równa asymptotycznej wartości danej zależnością (5.31). Tak więc w przypadku takich sygnałów, dla osiągnięcia dowolnie małego błędu aproksymacji można stosować filtr odpowiednio wysokiego rzędu, ponosząc co najwyżej "stratę" określoną wartością asymptoty (5.31). W przypadku granicznym sygnału $\{s(n)\}$, dla którego $|\alpha|=1$, stosowanie filtru zbyt wysokiego rzędu może być niedopuszczalne ze względu na równoczesne pogorszenie $(S/N)_o$ (5.30). Dla przypadku sygnałów $\{s(n)\}$ spełniających warunek (5.26), analitycznego wzoru na wartość $(S/N)_o$ nie udało się wyznaczyć. Obliczenia numeryczne wykazują, że wartość ta zmierza do $-\infty$ przy K dążącym do ∞ . Tak więc również w tym przypadku stosowanie filtru zbyt wysokiego rzędu może okazać się nie do przyjęcia.

5.3.3. Pięcioelementowy sygnał parzysty

W rozdziałach 5.3.1 i 5.3.2 omówiono przypadki sygnałów dwu- i trójelementowych $\{s(n)\}$, dla których filtr D dowolnego rzędu K jest rozwiązaniem problemu minimaxowej filtracji rozplotowej. Jak już podano w rozdziale 5.2, w bardziej ogólnym przypadku sygnałów wejściowych $\{s(n)\}$, istnieją przesłanki pozwalające przypuszczać, że filtr D rzędu 1 może być rozwiązaniem minimaxowego problemu filtracji rozplotowej tylko względem takich sygnałów $\{s(n)\}$, których wszystkie listki boczne mają jednakową amplitudę. Z tego względu, przedstawiona poniżej weryfikacja tej hipotezy w przypadku pięcioelementowych sygnałów $\{s(n)\}$ została ograniczona do takich, które na podstawie (4.5) są określone w następujący sposób [63]:

$$q=2, \quad a > 0, \quad s_i = a \cdot e_i, \quad e_i = \pm 1, \quad \text{dla } i = 1, 2. \quad (5.33)$$



Rys. 7. Przykład pięcioelementowego sygnału parzystego $\{s(n)\}$,
 $e_1 = -1$, $e_2 = 1$

Na mocy Twierdzenia 1 oraz (4.6) odpowiedź impulsowa filtru D rzędu 1 jest wówczas funkcją parzystą daną jako:

$$\{h_1(x)\} = \delta(n) + \sum_{i=1}^p x_i \cdot [\delta(n-i) + \delta(n+i)] \quad p=2 \quad (5.34)$$

Wprowadźmy następujące przedziały zmienności parametru a , określonego w (5.33).

$$F_1 = [(0, 1) \cup (3, \infty)] \setminus \{0.6789631\} \quad (5.35)$$

$$F_2 = (0, \infty) \setminus \left\{ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; 0.3406654 \right\} \quad (5.36)$$

Dodatkowo założmy, że,

$$a \in F_1 \quad \text{dla} \quad e_2 = 1 \quad (5.37)$$

$$a \in F_2 \quad \text{dla} \quad e_2 = -1 \quad (5.38)$$

Przy użyciu algorytmu D, otrzymujemy wówczas rozwiązanie dane odpowiedzią impulsową $\{h_1(x)\}$ (5.34) filtru D rzędu 1, której elementy \hat{x}_1 , \hat{x}_2 są określone następująco [63],

$$\hat{x}_1 = \frac{e_1 \cdot (ae_2 - 1)}{1 + ae_2 - a^2 + a \cdot |2 - ae_2| \cdot \text{sgn } B} \quad (5.39)$$

$$\hat{x}_2 = \frac{-ae_2}{1 + ae_2 - a^2 + a \cdot |2 - ae_2| \cdot \text{sgn } B} \quad (5.40)$$

zaś wartość błędu aproksymacji (patrz (5.9), $K=1$) wynosi,

$$\left| \frac{\epsilon_D}{g_D^{(1)}(0)} \right| = \frac{a^2 \cdot |2e_2 - a|}{a \cdot |2e_2 - a| + |B|} \quad (5.41)$$

gdzie

$$B = 1 + ae_2 - 5a^2 + 2e_2 a^3 \quad (5.42)$$

Wynika stąd następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.

Przy spełnionych założeniach (5.33) i (5.34) wartości \hat{x}_1 i \hat{x}_2 , określone wzorami (5.39) i (5.40) są jednoznacznym rozwiązaniem minimaxowego problemu filtracji rozplotowej, sformułowanego przez problem (M) (4.16), pod warunkiem, że zachodzi (5.38) oraz następujący warunek:

$$a \in (0, 1) \setminus \{0.6789631\} \quad \text{dla } e_2 = 1. \quad (5.43)$$

Wartość błędu aproksymacji wyrażona wzorem (5.41) jest równa minimalnej wartości błędu aproksymacji ε_∞ , w sensie normy $\|g-\delta\|_\infty$.

Dowód powyższego twierdzenia przedstawiono w [63, (Appendix B)].

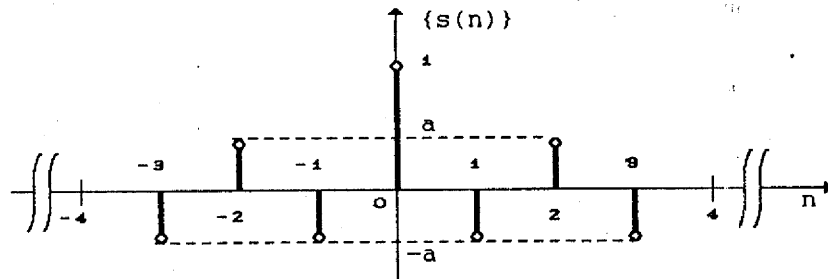
W Twierdzeniu 3 sformułowano warunki, jakie musi spełniać sygnał pięcioelementowy, aby filtr D rzędu 1 był rozwiązaniem minimaxowego problemu filtracji rozplotowej. Jednocześnie z dowodu tego twierdzenia wynika, że kryterium (K) przedstawione w rozdziale (5.2) pozwala dla każdego sygnału $\{s(n)\}$ określonego przez (5.33) otrzymać rozwiązanie minimaxowe w jednej iteracji. Jak przedstawiono w rozdziale 3, przy spełnionym warunku (2.18) filtry ZFF, tworzące filtr D są optymalnym rozwiązaniem problemu filtracji rozplotowej w przestrzeni L_1 . Jednocześnie, zależność (2.18) jest warunkiem koniecznym istnienia rozwiązania problemu idealnej filtracji rozplotowej, co przedyskutowano w rozdziale 2. W nawiązaniu do (5.33) warunek (2.18) jest równoważny następującej nierówności:

$$0 < a < 0.25 \quad (5.44)$$

Z tezy Twierdzenia 3 wynika, że dla dyskutowanego tu przypadku minimaxowej filtracji rozplotowej względem sygnałów pięcioelementowych, ograniczenie dane warunkiem (2.18) nie obowiązuje. W tym przypadku, ograniczenia dane przez (5.35) i (5.43) dowodzą, że rozwiązanie minimaxowe istnieje dla znacznie szerszego przedziału dopuszczalnych wartości a , niż by mogło to wynikać z warunku (2.18). To samo stwierdzenie jest prawdziwe w przypadku sygnałów dyskutowanych w rozdziałach 5.3.1 i 5.3.2.

5.3.4. Siedmioelementowy sygnał parzysty

W rozdziale przeanalizujemy problem istnienia odpowiedzi impulsowej minimaxowego filtra rozplotowego dla takiej klasy siedmioelementowych sygnałów parzystych $\{s(n)\}$, których listki boczne mają jednakową amplitudę [63].



Rys. 8. Przykład siedmioelementowego sygnału parzystego $\{s(n)\}$,
 $e_1 = -1$, $e_2 = 1$, $e_3 = -1$.

W nawiązaniu do (4.5) sygnał $\{s(n)\}$ przedstawiony na rys. 8 jest zdefiniowany w następujący sposób:

$$q=3, \quad a > 0, \quad s = a \cdot e_i, \quad e_i = \pm 1, \quad \text{dla } i = 1, 2, 3. \quad (5.45)$$

Zdefiniujmy następujące przedziały [63]:

$$G_1 = (0, 1/2) \cup (2/3, 1) \cup \left(\frac{7+\sqrt{33}}{2}, \infty\right), \quad (5.46)$$

$$G_2 = (0, \infty) \setminus \{0.2234578; 0.3142734\}, \quad (5.47)$$

$$G_3 = (0, \infty) \setminus \{0.3237679; 0.8019377\}, \quad (5.48)$$

$$G_4 = \left[\left(0, \frac{4-\sqrt{7}}{3}\right) \cup (3, \infty)\right] \setminus \{0.4237189\}. \quad (5.49)$$

Następnie załóżmy, że

$$a \in G_1 \quad \text{dla} \quad e_1 e_3 = 1 \quad \text{i} \quad e_2 = 1, \quad (5.50)$$

$$a \in G_2 \quad \text{dla} \quad e_1 e_3 = 1 \quad \text{i} \quad e_2 = -1, \quad (5.51)$$

$$a \in G_3 \quad \text{dla} \quad e_1 e_3 = -1 \quad \text{i} \quad e_2 = 1, \quad (5.52)$$

$$a \in G_4 \quad \text{dla} \quad e_1 e_3 = -1 \quad \text{i} \quad e_2 = -1. \quad (5.53)$$

Wówczas, przy użyciu algorytmu D otrzymujemy rozwiązanie w postaci odpowiedzi impulsowej filtru D rzędu 1, której elementy są dane następującymi wzorami:

$$\hat{x}_n = \frac{ax'_n}{a + d \cdot \text{sgn}(W_0 \cdot W)}, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3. \quad (5.54)$$

gdzie

$$x'_1 = -a \cdot [e_1 - a \cdot (2e_2 e_3 + e_1 e_2) + a^2 (e_1 + e_3)] \cdot W^{-1}, \quad (5.55)$$

$$x'_2 = -a \cdot (e_2 - 2ae_1 e_3 + a^2 e_2) \cdot W^{-1}, \quad (5.56)$$

$$x'_3 = -a \cdot [e_3 + ae_2 \cdot (e_3 - 2e_1) - a^2 e_1] \cdot W^{-1}, \quad (5.57)$$

$$W = 1 + ae_2 - (4 + 2e_1 e_3) \cdot a^2 + e_2 \cdot (1 + 2e_1 e_3) \cdot a^3, \quad (5.58)$$

$$W_0 = 1 + ae_2 - (10 + 2e_1 e_3) \cdot a^2 + (e_2 + 14e_1 e_2 e_3) \cdot a^3 - 4a^4, \quad (5.59)$$

$$d = a^2 \cdot |W|^{-1} \cdot |3 - 6ae_2 + 2a^2|, \quad \text{dla } e_1 e_3 = 1, \quad (5.60)$$

$$d = a^2 \cdot |W|^{-1} \cdot |2 + 5ae_2 + 2a^2|, \quad \text{dla } e_1 e_3 = -1. \quad (5.61)$$

Wartość błędu aproksymacji w sensie normy $\|g - \delta\|_\infty$ wynosi, (patrz(5.9), $K=1$):

$$\left| \frac{e_D}{g_{\langle 1 \rangle}(0)} \right| = \frac{a \cdot d}{d + a \cdot |W_0 / W|}. \quad (5.62)$$

Następnie zdefiniujmy przedziały:

$$G'_1 = (0, 1/2), \quad (5.63)$$

$$G'_2 = \left(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \setminus \{0.2234578; 0.3142734\}, \quad (5.64)$$

$$G'_3 = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \setminus \{0.3237679\}, \quad (5.65)$$

$$G'_4 = (1/4, -1+\sqrt{2}). \quad (5.66)$$

Na podstawie zależności od (5.45) do (5.66) sformułowano następujące twierdzenia:

Twierdzenie 4

Przy założeniu, że

$$a \in G'_1 \quad \text{dla} \quad e_1 e_3 = 1, \text{ and } e_2 = 1, \quad (5.67)$$

$$a \in G'_2 \quad \text{dla} \quad e_1 e_3 = 1, \text{ and } e_2 = -1, \quad (5.68)$$

$$a \in G'_3 \quad \text{dla} \quad e_1 e_3 = -1, \text{ and } e_2 = 1, \quad (5.69)$$

$$a \in G'_4 \quad \text{dla} \quad e_1 e_3 = -1, \text{ and } e_2 = -1. \quad (5.70)$$

odpowiedź impulsowa filtru D rzędu 1, (patrz (4.6), $p=3$), której elementy są dane wzorem (5.54), jest jednoznacznym rozwiązaniem minimaxowego problemu filtracji rozplotowej sformułowanego w postaci minimaxowego problemu $\langle M \rangle$ (4.16). Jednocześnie wartość błędu aproksymacji wyrażona wzorem (5.62) jest równa minimalnej wartości błędu aproksymacji ϵ_∞ w sensie normy $\|g-\delta\|_\infty$.

Twierdzenie 5

Założmy, że $a \in (0, 1/4)$, oraz $e_1 e_3 = -1$, i $e_2 = -1$. Wówczas filtr D rzędu 1, którego odpowiedź impulsowa jest określona wzorami (4.5) dla $p=3$ oraz (5.54), jest przybliżonym rozwiązaniem problemu minimaxowego $\langle M \rangle$, (4.16). Dodatkowo, dla $a \in (0, 1/5]$ kryterium $\langle K \rangle$ pozwala wyznaczyć podzbiór funkcji $r_n(z)$ dla $n \in \mathbb{N}$, (4.18), który realizuje minimaxowy problem $\langle M \rangle$ (4.16). Dla $a \in (1/5, 1/4)$, kryterium $\langle K \rangle$ jest nieskuteczne.

Dowody Twierdzeń 4 i 5 podano w [63, (Appendix C)].

W przypadku zarówno sygnału pięcio-, jak i siedmioelementowego nie udało się wyprowadzić wzoru analitycznego na wartość wyjściowego, znormalizowanego stosunku sygnału do szumu $(S/N)_0$. Obliczenia kontrolne wykazały jednak, że wraz ze wzrostem amplitudy a listków bocznych wielkość ta maleje. Wynik ten jakościowo jest zgodny z wnioskami wynikającymi ze wzorów (5.20), (5.21) i (5.30), (5.31) odpowiednio dla sygnałów dwu- i trójelementowych.

Jak przedyskutowano w rozdziale 5.2, w szczególnym przypadku parzystego sygnału wejściowego, spełniającego warunek $\langle C_2 \rangle$ oraz zależność (5.10), filtr D reprezentuje sobą rozwiązanie minimaxowego problemu filtracji rozplotowej, sformułowanego w postaci problemu $\langle M \rangle$ (4.16). Szczegółowe określenie tych warunków dla sygnałów dwu-, trój-, pięcio- i siedmioelementowych jest treścią analitycznych rozważań przeprowadzonych odpowiednio w podrozdziałach od 5.3.1 do 5.3.4. Rozważania tego typu dla dłuższych sygnałów byłyby bardzo złożone - już dla przypadku sygnału siedmioelementowego dowód Twierdzenia 4 i 5 jest nader żmudny, (patrz [63, Appendix C]). Z tego względu rozważania analityczne zostały zakończone na przypadku sygnału siedmioelementowego. Warto również podkreślić, że podobnie jak w przypadku sygnałów pięcioelementowych, również w przypadku sygnałów siedmioelementowych przedziały zmienności a , dane przez (5.63) do (5.66), dla których filtr D reprezentuje sobą rozwiązanie minimaxowego problemu filtracji rozplotowej, są znacznie szersze niż to określa warunek (2.18).

W ogólnym przypadku sygnału $\{s(n)\}$, spełniającego warunek $\langle C_1 \rangle$ lub $\langle C_2 \rangle$ i (5.9), (patrz rozdział 5.2), odpowiedź impulsowa filtru D jest tylko przybliżonym rozwiązaniem minimaxowego problemu filtracji rozplotowej. Wówczas, dla otrzymania pożądanego rozwiązania należy skorzystać z kryterium $\langle K \rangle$, przedstawionego w rozdziale 5.2. Użycie tego kryterium nie gwarantuje uzyskania pożądanego rezultatu, (patrz np. teza Twierdzenia 5). Tym niemniej, w kontrolnych obliczeniach dla kilku przypadków parzystego sygnału pięcioelementowego, którego listki boczne posiadały różne amplitudy, kryterium $\langle K \rangle$ okazało się skuteczne. Wyniki tych obliczeń przedstawiono w Tabelicy 4.

Tabelica 4

Lp	Pięcioelementowy sygnał wejściowy $\{s(n)\}$ (patrz (5.33))	$\left \frac{\varepsilon_D}{g_D^{(1)}(0)} \right $	ε_∞
1.	$a_1 = -0.1 ; a_2 = 0.2$	$23/656 \cong$ 0.03506097	$4/115 \cong$ 0.03478261
2.	$a_1 = 0.2 ; a_2 = 0.1$	$15/567 \cong$ 0.02821869	$8/307 \cong$ 0.02605863
3.	$a_1 = -0.2 ; a_2 = 0.1$	$3.21239 \cdot 10^{-3}$	$2.80336 \cdot 10^{-3}$

W następnym rozdziale przedstawiono rezultaty analizy porównawczej rozwiązań problemu filtracji rozplotowej w przestrzeniach L_1 i L_2 oraz metodą obcięcia nieskończonego szeregu, a także z użyciem algorytmu D. Analizę tę oparto na wynikach obliczeń numerycznych błędu aproksymacji w przestrzeniach L_1 , L_2 i L_∞ oraz wyjściowego, znormalizowanego stosunku sygnału do szumu $(S/N)_0$, dla przykładowej populacji 13-elementowych sygnałów parzystych.

5.4. Porównanie wyników rozwiązania problemu filtracji rozplotowej wybranymi metodami

Celem niniejszego rozdziału jest porównanie wielkości błędów aproksymacji $\|g-\delta\|_1$, $\|g-\delta\|_2$ oraz $\|g-\delta\|_\infty$, jak również wartości wyjściowego znormalizowanego stosunku sygnału do szumu $(S/N)_0$. Porównanie to przeprowadzono dla rozwiązań problemu filtracji rozplotowej w przestrzeniach L_1 i L_2 oraz metodą obcięcia nieskończonego szeregu, a także z użyciem algorytmu D. Dla ilustracji wybrano sygnały parzyste złożone z 13 elementów. Szczególnym przypadkiem takiego sygnału jest funkcja autokorelacji 13-bitowego kodu Barkera, posiadająca następującą postać

$$\{s(n)\} = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 13, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}. \quad (5.71)$$

Kod Barkera jest wykorzystywany w radiolokacji jako sygnał lokacyjny, zaś

filtracja redukująca amplitudę listków bocznych w jego funkcji autokorelacji jest znaczącym składnikiem procesu przetwarzania odbitego sygnału lokalnego. Z tego względu przedstawione poniżej wyniki obliczeń mają oczywiście znaczenie praktyczne. Dla rozpatrywanego tu sygnału $\{s(n)\}$ (5.71), wartość $c=12/13$ (patrz(2.22)), co na mocy warunku (2.18) oznacza, że istnieją rozwiązania problemu filtracji rozplotowej z użyciem wszystkich wymienionych metod. Jak stwierdzono w rozdziale 4.2, dla takiego sygnału filtr D rzędu 1 może być rozwiązaniem minimaxowego problemu filtracji rozplotowej, co potwierdziło się w toku obliczeń. Z własności algorytmu D wynika, że odpowiedź impulsowa filtru D rzędu 1 składa się z tej samej liczby elementów co sygnał wejściowy $\{s(n)\}$. Celem porównania wyników otrzymanych z użyciem wymienionych powyżej rozwiązań problemu filtracji rozplotowej założono więc, że odpowiedzi impulsowe filtrów odpowiadających im filtrów są złożone z 13 elementów. Wyniki obliczeń przedstawiono w Tablicy 5.

Tablica 5

	$\ g-\delta\ _1$	$\ g-\delta\ _2$	$\ g-\delta\ _\infty$	$(S/N)_o$ [dB]
obcięcie szeregu	0.8408	0.1902	0.0637	-1.5335
minimalizacja normy w L_1 , (ZFF) *	0.1782	0.0562	0.0239	-1.1282
minimalizacja normy w L_2	0.2075	** 0.0545	0.0228	-1.0982
filtr D	0.3546	0.0763	*** 0.0182	-0.9829

- * minimum błędu aproksymacji w przestrzeni L_1 równe ε_1
 ** minimum błędu aproksymacji w przestrzeni L_2 równe ε_2
 *** minimum błędu aproksymacji w przestrzeni L_∞ równe ε_∞

Rezultaty obliczeń przedstawione w Tablicy 5 dotyczą szczególnego, a więc niezbyt reprezentatywnego przypadku 13-elementowego sygnału wejściowego $\{s(n)\}$. Dla uogólnienia wyników analogiczne obliczenia, jak w przypadku tego sygnału, przeprowadzono dla populacji złożonej z 300 sygnałów parzystych, w których amplituda i znak listków bocznych zostały określone przy użyciu generatora liczb losowych. Parametr c , (patrz(2.22)) pełni tu rolę wyróżnika definiującego klasę sygnałów $\{s(n)\}$, określonych jego wartością. Z tego względu, każdy z analizowanych sygnałów został znormalizowany w taki sposób, żeby wartość parametru c , tak jak w przypadku $\{s(n)\}$ danego przez (5.71), wynosiła również 12/13. Przyjęto także, że długość odpowiedzi impulsowej filtrów rozplotowych obliczonych wszystkimi czterema metodami wynosi 13. Wyniki obliczeń zostały usrednione i przedstawione w Tablicy 6.

Tablica 6

	$\ g-\delta\ _1$	$\ g-\delta\ _2$	$\ g-\delta\ _\infty$	$(S/N)_0$ [dB]
obcięcie szeregu	0.5242	0.1329	0.0541	-2.2160
minimalizacja normy w L_1 , (ZFF) *	0.2510	0.0883	0.0446	-2.4649
minimalizacja normy w L_2	0.3013	** 0.0818	0.0387	-2.2844
filtr D	0.3875	0.0960	*** 0.0337	-2.0526

* wartość średnia minimum błędu aproksymacji w L_1

** wartość średnia minimum błędu aproksymacji w L_2

*** wartość średnia minimum błędu aproksymacji ϵ_D wg algorytmu D

Z rezultatów obliczeń przedstawionych w Tablicach 5 i 6 wynika oczywisty wniosek, że z punktu widzenia wielkości błędu aproksymacji w przestrzeniach L_1 , L_2 i L_∞ , filtr otrzymany przez obcięcie szeregu nieskończonego jest rozwiązaniem najgorszym. Filtr D, co również było do przewidzenia, pozwala uzyskać najmniejszą wartość błędu aproksymacji w przestrzeni L_∞ . Z idei algorytmu D wynika, że dla każdego sygnału spełniającego warunek (2.18) filtr D jest rozwiązaniem, które w tej przestrzeni charakteryzuje się mniejszym błędem niż w przypadku filtru ZFF. Filtr D charakteryzuje się również średnio najkorzystniejszym wyjściowym stosunkiem sygnału do szumu, chociaż stwierdzenie to niekoniecznie musi być prawdziwe w odniesieniu do każdego sygnału należącego do analizowanej populacji. Ogólniejsze wnioski dotyczące własności algorytmu i filtru D wymagają obszernej analizy porównawczej dla różnych klas sygnałów. Zagadnienie to wykracza poza ramy niniejszej pracy.

6. ZAKOŃCZENIE

6.1. Określenie kierunków dalszych badań

Ze względu na ograniczone ramy niniejszej pracy, nie wszystkie poruszone w niej problemy i wątki zostały rozwinięte w sposób pełny. Co więcej, wiele spośród nich nie zostało jeszcze rozpoznanych i czeka na opracowanie. W szczególności, na dalsze badania zasługują następujące zagadnienia:

1. Problem istnienia rozwiązania filtracji rozplotowej w przestrzeni L_1 względem sygnałów wejściowych $\{s(n)\}$ nie spełniających ograniczającego warunku (2.18).

Na obecnym etapie wiedzy dokładne rozwiązanie tego problemu wydaje się trudne. Szczególnie interesujące byłoby opracowanie teorii, która w sposób

jednolity stanowiłaby o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania tego problemu dla szerokiej klasy sygnałów. Wyniki obliczeń kontrolnych dla sygnałów nie spełniających warunku (2.18) pozwalają przypuszczać, że być może w przypadku niektórych z nich filtr ZFF jest również rozwiązaniem optymalnym w przestrzeni L_1 . Ponieważ rzeczywiste sygnały nie zawsze podlegają ograniczeniu warunkiem (2.18), rozwiązanie tego problemu ma duże znaczenie praktyczne.

2. Dokładne rozpoznanie własności algorytmu D. W szczególności istotne wydają się następujące problemy:

- a. - Dokładne określenie klasy sygnałów parzystych, dla których filtr D reprezentuje sobą rozwiązanie minimaxowego problemu filtracji rozplotowej. Jak przedyskutowano w rozdziale 5.2, w szczególnym przypadku parzystych sygnałów wejściowych spełniających warunek $\langle C_2 \rangle$ oraz zależność (5.10), filtr D reprezentuje sobą rozwiązanie minimaxowego problemu filtracji rozplotowej, sformułowanego w postaci problemu $\langle M \rangle$ (4.16). Szczegółowe określenie tych warunków dla sygnałów dwu-, trój-, pięcio- i siedmioelementowych jest treścią analitycznych rozważań przeprowadzonych odpowiednio w rozdziałach od 5.3.1 do 5.3.4. Rozważania tego rodzaju dla dłuższych sygnałów są oczywiście możliwe, lecz jednocześnie coraz bardziej złożone - już dla przypadku sygnału siedmioelementowego dowody Twierdzeń 4 i 5 są nader żmudne, (patrz [D63, (Appendix C)]). Jednocześnie na podstawie dotychczasowych obserwacji można przypuszczać, że dla parzystych sygnałów $\{s(n)\}$ o dowolnej długości, spełniających warunek (2.18), których wszystkie listki boczne mają jednakową amplitudę i znak, filtr D rzędu 1 jest rozwiązaniem minimaxowego problemu filtracji rozplotowej. To przypuszczenie potwierdza wynik otrzymany dla 13-elementowego sygnału $\{s(n)\}$, mającego postać 13-bitowego kodu Barkera, używanego m.in. w radiolokacji. Jak pokazano w rozdziale 5.4., błąd aproksymacji dla filtru D rzędu 1 jest równy błędowi minimalnemu w przestrzeni L_∞ i wynosi $\epsilon_\infty \cong 0.01821188$. Dowód powyższego twierdzenia czeka na opracowanie.
- b. Zbadanie efektywności algorytmu D w zastosowaniu do rozwiązania problemu filtracji rozplotowej względem sygnałów nie będących funkcjami parzystymi. Na mocy rozważań przedstawionych w rozdziale 5.2, w takim przypadku filtr D reprezentuje sobą tylko przybliżone rozwiązanie minimaxowego zagadnienia filtracji rozplotowej. Z drugiej strony, rozwiązanie dane filtrem D wydaje się stanowić najlepsze znane autorowi przybliżenie poszukiwanego rozwiązania, możliwe do wyznaczenia na drodze analitycznej. Z tego powodu rozwiązanie dane filtrem D stanowi, w ogólnym przypadku, "najlepszy" punkt startowy w iteracyjnym procesie wyznaczania poszukiwanego rozwiązania minimaxowego. Wydaje się, że przedstawione w rozdziale 5.2 kryterium $\langle K \rangle$ może w wielu przypadkach umożliwić wyznaczenie poszukiwanego rozwiązania w jednej iteracji. W

przypadkach, w których kryterium $\langle K \rangle$ zawodzi, można je poddać stosownej modyfikacji. Należałoby także porównać numeryczną efektywność obliczeń związanych z wyznaczeniem, rozwiązania minimaxowego problemu filtracji rozplotowej przy użyciu algorytmu D oraz standardowego algorytmu iteracyjnego.

Dodatkowym tematem znacznie wykraczającym poza ramy niniejszej pracy jest zagadnienie złego postawienia problemu filtracji rozplotowej i złego uwarunkowania numerycznego układu równań pozwalających wyznaczyć rozwiązanie tego problemu. Dyskusję tych zagadnień na tle rezultatów otrzymanych w niniejszej pracy przedstawiono poniżej.

6.2. Dyskusja złego postawienia problemu i złego uwarunkowania numerycznego równań filtracji rozplotowej

Jak już przedstawiono w rozdziale 1.2, uważa się, że problem filtracji rozplotowej jest na ogół źle postawiony, co w konsekwencji prowadzi do złego uwarunkowania numerycznego równań pozwalających wyznaczyć jego rozwiązanie. Sformułowanie matematycznej definicji dobrego postawienia problemu, którego kontradykcją jest złe postawienie, przypisuje się Hadamardowi [4], [13]. W myśl tej definicji rozważmy ogólny problem liniowy polegający na wyznaczeniu funkcji h na podstawie znajomości funkcji g , przedstawiony w następującej postaci [4]:

$$Ah = g, \quad (6.1)$$

gdzie A jest operatorem liniowym, którego dziedziną jest zbiór H przestrzeni Banacha B_1 , a przeciwdziedziną zbiór G przestrzeni Banacha B_2 . Problem odwrotny jest dobrze postawiony wówczas, gdy spełnione są następujące warunki:

1. Operator A posiada operator odwrotny A^{-1} , taki że zbiór H odwzorowywany jest na zbiór G w sposób jednoznaczny, tzn. każdemu elementowi $g \in G$ odpowiada jednoznacznie element rozwiązania $A^{-1}g \in H$.

2. A^{-1} jest operatorem ograniczonym, tzn. istnieje taka liczba M , że

$$\|A^{-1}g_1 - A^{-1}g_2\|_{B_1} \leq M \cdot \|g_1 - g_2\|_{B_2}. \quad (6.2)$$

Pierwszy z tych warunków określa istnienie i jednoznaczność, drugi zaś ciągłość operatora odwrotnego [13].

Z kolei, złe uwarunkowanie numeryczne objawia się dużą wrażliwością wyniku na małe zaburzenia danych wejściowych. Uważa się, że złe postawienie problemu pociąga za sobą złe uwarunkowanie numeryczne odpowiadających mu równań. Z tego powodu niektórzy autorzy niezbyt słusznie utożsamiają pojęcia złego postawienia problemu i złego uwarunkowania numerycznego odpowiadających mu równań, np. [203]. Twierdzenie odwrotne mówiące, że dobre postawienie problemu pociąga za sobą dobre uwarunkowanie numeryczne odpowiada-

jących mu równań nie musi być prawdziwe. Wykazuje się, co również przedstawiono w dalszej dyskusji, że dobrze postawiony problem może prowadzić do źle uwarunkowanego numerycznie układu równań [13]. Jako miarę uwarunkowania numerycznego przyjmuje się tzw. wskaźnik uwarunkowania, (ang. condition number), który najczęściej definiuje się jako iloczyn norm operatora i operatora odwrotnego, tzn. [13]:

$$\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| . \quad (6.3)$$

Jeżeli tak zdefiniowany wskaźnik uwarunkowania jest bliski 1, wówczas układ równań jest dobrze uwarunkowany, jeżeli jest on dużo większy od 1 - układ jest źle uwarunkowany.

Jak wykazano w rozdziale 2, dla sygnałów wejściowych $\{s(n)\}$ należących do przestrzeni L_1 , ograniczonych warunkiem (2.18), istnieje jednoznaczne rozwiązanie zagadnienia odwrotnego do splotu, nazwanego problemem idealnej filtracji rozplotowej. Tak więc na mocy definicji Hadamarda spełniony jest warunek istnienia i jednoznaczności rozwiązania tego problemu. Rozważmy warunek ciągłości określony przez (6.2). Na podstawie [252] mamy:

$$\left. \begin{aligned} a * b = \delta \quad Ah = a * h, \quad A^{-1}g = b * g, \quad a, b \in L_1, \\ \|a\|_1 = 1+c, \quad \|b\|_1 \leq (1-c)^{-1}, \quad 0 \leq c < 1, \quad (\text{patrz (2.22)}). \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

Stąd na mocy (6.2) otrzymujemy

$$\|A^{-1}g_1 - A^{-1}g_2\|_1 = \|b * (g_1 - g_2)\| \leq \|b\| \cdot \|g_1 - g_2\| . \quad (6.5)$$

Skończona wartość normy $\|b\|_1$ (6.4) odpowiada liczbie M w zależności (6.2). W ten sposób wykazaliśmy ciągłość operatora A^{-1} . Kolejno wyznaczmy wskaźnik uwarunkowania układu równań dającego rozwiązanie problemu idealnej filtracji rozplotowej. Na podstawie (6.3) i (6.4) mamy,

$$\text{cond}(A) = \frac{1+c}{1-c} . \quad (6.6)$$

Widać stąd, że dla wartości c bliskich jedności rozważany problem jest źle uwarunkowany numerycznie. Reasumując powyższe należy zauważyć, że problem idealnej filtracji rozplotowej względem sygnałów $\{s(n)\} \in L_1$, spełniających warunek (2.23) jest dobrze postawiony w sensie definicji Hadamarda. Jednocześnie dla c bliskiego 1, zdefiniowanego przez (2.22), układ równań pozwalający wyznaczyć rozwiązanie tego problemu jest źle uwarunkowany numerycznie.

Analogiczny wniosek, dotyczący postawienia problemu, można wysnuć w odniesieniu do rozwiązań filtracji rozplotowej względem sygnałów $\{s(n)\}$ w przestrzeni L_1 i L_2 , omówionych w rozdziale 3. Wniosek taki obowiązuje również dla rozwiązań optymalnych w przestrzeni L_∞ , reprezentowanych przez filtr D , (patrz rozdział 5). Wspólną cechą wymienionych tu rozwiązań w przestrzeniach L_1 , L_2 , i L_∞ jest założenie, że przybliżony operator odwrotny reprezentowany przez odpowiedź impulsową $\{h(n)\}$ jest funkcją skończoną, z czego wynika, że $\{h(n)\} \in L_1$. Stąd, norma przybliżonego operatora odwrotnego ma również wartość skończoną. Z kolei, jak pokazano w (6.5), wartość

normy operatora odwrotnego jest liczbą M z definicji (6.2), zapewniającą jego ciągłość. Można więc sformułować wniosek mówiący, iż z istnienia jednoznacznego rozwiązania problemu filtracji rozplotowej należącego do przestrzeni L_1 wynika, że problem ten jest dobrze postawiony w sensie Hadamarda. Inaczej mówiąc, istnienie jednoznacznego rozwiązania tego problemu, danego odpowiedzią impulsową $\{h(n)\} \in L_1$, implikuje ciągłość przybliżonego operatora odwrotnego, zdefiniowanego tą odpowiedzią. W myśl definicji Hadamarda tak rozumiany problem filtracji rozplotowej jest dobrze postawiony. Wniosek ten wydaje się sprzeczny z utrwalonym w bibliografii poglądem mówiącym, że problem filtracji rozplotowej jest na ogół źle postawiony. Sprzeczność ta jest jednak pozorna, gdyż wniosek dotyczący złego postawienia rzeczoności problemu dotyczy tych sytuacji, w których jego rozwiązanie nie istnieje. Sytuacja taka ma miejsce, gdy próbuje się rozwiązać problem w myśl definicji idealnej filtracji rozplotowej względem sygnałów nie należących do L_1 , albo kiedy zakłada się, że rozwiązaniem tego problemu jest odpowiedź impulsowa dana funkcją skończoną. W tych przypadkach rozwiązanie w ogólności nie istnieje, a sam problem jest źle postawiony. Ponieważ w praktycznych zastosowaniach wymaga się, aby odpowiedź impulsowa była funkcją skończoną, posługiwanie się definicją idealnej filtracji rozplotowej prowadzi w sposób oczywisty do sformułowania problemu źle postawionego. Taki przypadek jest najczęściej rozważany w bibliografii, a wyniki jego analizy są źródłem upowszechnionego poglądu, że problem filtracji rozplotowej jest na ogół źle postawiony. W celu uniknięcia złego postawienia problemu, w niniejszej pracy zaproponowano realistyczną definicję filtracji rozplotowej (3.5), uwzględniającą nieunikniony błąd aproksymacji, wynikający z założenia, że odpowiedź impulsowa filtru rozplotowego jest funkcją skończoną. Dzięki temu otrzymano rozwiązania problemu w przestrzeniach L_1 , L_2 i L_∞ , przedstawione w rozdziałach 3, 4 i 5, których istnienie i jednoznaczność jest dowodem na dobre postawienie problemu, danego definicją (3.5).

Osobnym zagadnieniem jest uwarunkowanie numeryczne układu równań pozwalających wyznaczyć rozwiązanie problemu filtracji rozplotowej. Jak już stwierdzono, z dobrego postawienia problemu nie musi wynikać, że układ równań dający jego rozwiązanie będzie dobrze uwarunkowany numerycznie. Z charakteru przedmiotu analizowanego w niniejszej pracy wynika następujący wniosek, wydaje się, ogólniejszej natury. Jeżeli dany problem jest dobrze postawiony w określonych przedziałach zmienności swojego parametru (lub pewnej liczby parametrów), to należy oczekiwać, że układ równań pozwalający wyznaczyć rozwiązanie tego problemu będzie dobrze uwarunkowany numerycznie, dla wartości parametru należących do środka wymienionych przedziałów. Skrajne punkty tych przedziałów, w szczególności w przypadku przedziałów otwartych, są zazwyczaj punktami osobliwymi, dla których rozwiązanie problemu nie istnieje lub ma charakter nieciągły. Siłą rzeczy, jednostronne sąsiedztwo takiego punktu należące do rzeczoności przedziału jest obszarem złego uwarunkowania numerycznego - tym gorszego im wartość parametru leży bliżej punktu osobliwego. Przykładowo, w nawiązaniu do omawianego tu prob-

lemu idealnej filtracji rozplotowej, parametrem określającym przedział, w którym istnieje jego rozwiązanie, jest c (patrz 6.4). Dla granicznej wartości $c=1$, prawa strona oszacowania normy $\|b\|_1$ w (6.4) jest nieograniczona, tj. nieciągła. Dla wartości $c < 1$, lecz należących do bliskiego sąsiedztwa 1, układ równań pozwalający wyznaczyć rozwiązanie jest źle uwarunkowany, czego miarą jest duża wartość wskaźnika uwarunkowania (6.6). Na zakończenie należy zauważyć, że w przypadku gdy analizowany problem można interpretować w kategoriach filtracji liniowej, tak jak ma to miejsce w niniejszej pracy, wówczas uwarunkowanie numeryczne można oceniać na podstawie wielkości wyjściowego stosunku sygnału do szumu, np. [13]. Im gorszy jest wyjściowy stosunek sygnału do szumu, tym gorsze jest uwarunkowanie numeryczne. Wyniki analizy przeprowadzonej w rozdziale 5 dla przypadków, w których udało się wyznaczyć zależność analityczną na wielkość wyjściowego, znormalizowanego stosunku sygnału do szumu $(S/N)_o$, (zależności (5.20) do (5.22) i (5.30) do (5.32)), w pełni potwierdzają przedstawione powyżej wnioski. Rzeczywiście, dla bliskiego sąsiedztwa granicznej wartości przedziału, w którym zawarty jest parametr określający istnienie rozwiązania, $(S/N)_o$ przyjmuje niedopuszczalne w praktyce wartości. Tak więc rozważany w pracy wyjściowy, znormalizowany stosunek sygnału do szumu $(S/N)_o$ zyskuje dodatkowo na znaczeniu jako wskaźnik uwarunkowania numerycznego układu równań pozwalających rozwiązać problem filtracji rozplotowej.

6.3. Podsumowanie

Celem ogólnym niniejszej pracy jest analiza liniowych metod filtracji rozplotowej względem sygnałów o skończonym czasie trwania, przeprowadzona w dziedzinie czasu na gruncie teorii aproksymacji. Dla realizacji tak sformułowanego celu rozważono następujące zagadnienia.

1. Wprowadzono i uporządkowano terminologię w zakresie analizowanych zagadnień, w szczególności zdefiniowano i rozróżniono pojęcia "idealny filtr rozplotowy", "filtr rozplotowy" i "filtr odwrotny" (rozdział 1.1).
2. Przedyskutowano trudności w rozwiązywaniu zagadnień filtracji rozplotowej, wynikające ze złego postawienia problemu i złego uwarunkowania numerycznego równań tej filtracji (rozdział 1.2 i 6.2).
3. Przedstawiono klasyfikację i dokonano bibliograficznego przeglądu zastosowań filtracji rozplotowej (rozdział 1.3).
4. Przeanalizowano zagadnienie istnienia i jednoznaczności analitycznego rozwiązania problemu idealnej filtracji rozplotowej oraz wielkości błędu aproksymacji spowodowanego obcięciem nieskończonego szeregu, reprezentującego to rozwiązanie (rozdział 2.1 - 2.3). Rezultatem badań nad tym zagadnieniem są następujące prace autora: [71], [72], [73], [252], [253].

5. Sformułowano problem filtracji rozplotowej w ujęciu teorii aproksymacji oraz przedyskutowano istnienie i jednoznaczność rozwiązania tego problemu w przestrzeniach L_1 i L_2 (rozdział 3.1 - 3.4).
6. Sformułowano problem filtracji rozplotowej w przestrzeni L_∞ , przedstawiono metodę linearyzacji tego problemu i sposób jego rozwiązania z użyciem metody de La Vallée Poussina, prowadzący do algorytmu iteracyjnego (rozdział 4.1 - 4.3). Problemowi temu jest poświęcona praca autora [62].
7. Przedstawiono algorytm, reprezentujący filtr D, którego odpowiedź impulsowa jest dokładnym rozwiązaniem minimaxowego problemu filtracji rozplotowej dla pewnej klasy sygnałów parzystych (rozdział 5.1). Sformułowano warunki, przy których filtr D może być rozwiązaniem minimaxowym oraz wprowadzono kryterium $\langle K \rangle$ umożliwiające otrzymanie tego rozwiązania w jednej iteracji (rozdział 5.2). Następnie przeanalizowano szczegółowe warunki, przy których filtr D reprezentuje sobą rozwiązanie minimaxowego problemu filtracji rozplotowej dla przypadku sygnału dwuelementowego oraz parzystych sygnałów trój-, pięcio- i siedmioelementowych (rozdział 5.3.1 - 5.3.4). Wreszcie, dla wybranej losowo populacji sygnałów parzystych porównano wyniki obliczeń numerycznych ilustrujących wielkości błędów aproksymacji i wyjściowego stosunku sygnału do szumu dla rozwiązań problemu filtracji rozplotowej w przestrzeniach L_1 i L_2 oraz metodą obcięcia nieskończonego szeregu, a także z użyciem algorytmu D (rozdział 5.4). Zagadnieniom przedstawionym w tym punkcie poświęcona jest znacząca część dorobku naukowego autora, przedstawiona m.in. w następujących pracach: [60], [61], [62], [63], [69], [70], [71], [78], [84] i [250].
8. Na zakończenie pracy przedyskutowano kierunki dalszych badań oraz na tle otrzymanych rezultatów przedyskutowano zagadnienie złego postawienia problemu filtracji rozplotowej, jak również złego uwarunkowania numerycznego jej równań.
9. W Dodatku A zdefiniowano i wyprowadzono wyrażenie na zysk filtracji filtru liniowego, zdefiniowany jako wyjściowy stosunek sygnału do szumu tego filtru, znormalizowany względem tej wielkości dla filtru dopasowanego.